



**BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM**  
MATEMATIKAI KÖZGAZDASÁGTAN ÉS GAZDASÁGELEMZÉS TANSZÉK

# **BEVEZETÉS AZ ÖKONOMETRIAI IDŐSORELEMZÉSBE**

VINCZE JÁNOS

Budapest, 2018. december

# Tartalomjegyzék

<b>1</b>	<b>Bevezetés</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Egyváltozós idősorelemzés az időtartományban</b>	<b>5</b>
2.1	Idősorok valószínűségszámítási alapfogalmai . . . . .	5
2.2	Egy fontos alosztály: stacionárius idősorok . . . . .	5
2.2.1	Mozgóátlag (MA (q)) folyamatok . . . . .	7
2.2.2	Autoregresszív (AR (p)) folyamatok . . . . .	9
2.2.3	Parciális autokorreláció . . . . .	11
2.2.4	Általánosítás: ARMA (p,q) folyamatok . . . . .	12
2.2.5	Kovariancia stacionárius folyamat időtartománybeli reprezen- tációja . . . . .	13
2.3	ARMA modellek vizsgálata: a Box-Jenkins analízis . . . . .	14
2.3.1	Identifikáció . . . . .	14
2.3.2	ARMA folyamatok becslése . . . . .	16
2.3.3	Diagnosztikák és modell választás . . . . .	18
2.3.4	ARMA folyamatok előrejelzése . . . . .	18
2.3.5	ARIMA (p,d,q) folyamatok . . . . .	23
2.3.6	Hogyan elemezzünk egy idősort ARIMA-ként? (Ideiglenes összefoglaló) . . . . .	24
2.3.7	További modelltípusok . . . . .	25
2.4	Gyakorlatok R-ben . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Többváltozós idősorelemzés az időtartományban</b>	<b>37</b>
3.1	Együttes stacionaritás . . . . .	37
3.2	Stacionárius VAR (vektor autoregresszió) reprezentáció . . . . .	38
3.3	Becslés és identifikáció . . . . .	39
3.4	Impulzusválasz függvény . . . . .	39
3.4.1	Exogenitás és Granger okság . . . . .	41
3.4.2	A (stacionárius) VAR elemzés algoritmusa . . . . .	42
3.5	Kointegráció . . . . .	46
3.5.1	Az Engle-Granger módszer . . . . .	46
3.6	Az $\mathbf{x}_t$ vektor minden eleme I(1) eset és kointegráció . . . . .	47
3.6.1	Johansen-módszer . . . . .	48
3.6.2	A differenciálás veszélyei . . . . .	50
3.7	Gyakorlatok R-ben . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Idősorok frekvenciatartománybeli elemzése</b>	<b>55</b>
4.1	Egy általános matematikai probléma: függvények előállítása szinuszoidok összegeként (Fourier-analízis) . . . . .	55
4.2	Fourier-sorok . . . . .	55
4.3	Hogyan használható mindez az idősorelméletben? . . . . .	57
4.4	Statisztikai idősorelemzés és frekvenciatartomány . . . . .	58
4.4.1	Nem-paraméteres becslések . . . . .	58
4.4.2	Paraméteres becslések . . . . .	59

4.4.3	Wavelet elemzés . . . . .	60
4.5	Gyakorlatok R-ben . . . . .	61
4.6	Mátrixaritmetika . . . . .	62
4.7	Lineáris differencia egyenletek . . . . .	64
4.8	Lineáris differencia egyenletek . . . . .	65
4.8.1	Többváltozós elsőrendű lineáris differenciaegyenlet . . . . .	65
4.9	Késleltetési polinomok és inverzük . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Felhasznált irodalom</b>	<b>70</b>

# 1 Bevezetés

Ez a jegyzet a Gazdaság és Pénzügy matematikai Elemző osztatlan szak **Idősorelemzés** tárgyához készült, amit a szak hallgatói a III. év első szemeszterében tanulnak. A szak hallgatói a szokásos közgazdasági képzésekhez képest magasabb szintű analízis, algebra és valószínűség számítási ismeretekkel rendelkeznek. A jegyzet arra alapoz, hogy emiatt absztraktabb idősorelemzést lehet nyújtani nekik, mint amit az ilyen szokásos könyvek nyújtanak, ugyanakkor nem megy bele olyan matematikai részletekbe, mint például J.D. Hamilton *Time Series Analysis* című tankönyve, amelyet gyakran használnak az ökonometria oktatásban. A jegyzet együtt tanulmányozandó Darvas Zsolt *Bevezetés az idősorelemzésbe* című jegyzetével, amellyel egyfelől jelentős az átfedés, másfelől az említett jegyzet sokkal részletesebben tartalmaz bizonyos anyagrészeket, amelyek itt csak röviden vannak megemlítve. A jelen jegyzet két újdonsággal rendelkezik ehhez képest: 1. egy egész fejezet foglalkozik a frekvenciatartományi, illetve röviden a wavelet, elemzés eszközeivel, és 2. ez az anyag az R nyelv használatán keresztül mutatja be az idősorelemzési számításokat, nagy mértékben támaszkodva a Shumway-Stoffer (2011) könyv és a Pfaff (2008) cikk adathalmazaira és a bennük használt programokra és programcsomagokra is.

A jegyzet alapvetően három nagy fejezetet tartalmaz. Az első az egyváltozós idősorelemzés időtartományi megközelítését mutatja be, ami saját érdekességén kívül fontos bevezető a makro ökonometriában leggyakrabban használt többváltozós idősorelemzési módszerekhez. Ezután az ökonometriában kevésbé intenzíven használt frekvenciatartományi és wavelet módszerekkel foglalkozik egy fejezet. A jegyzetet egy Függelék zárja, ami bizonyos idekapcsolódó matematikai technikákat (lineáris differenciaegyenletek és késleltetési operátorok) tárgyal.

## 2 Egyváltozós idősorlelemzés az időtartományban

### 2.1 Idősorok valószínűségszámítási alapfogalmai

Amikor két gazdasági idősorra regressziót számolunk szinte mindig azt találjuk, hogy a becült reziduumok "szabályosak", nem tűnnek véletlenszerű, egymástól független eltéréseknek. Ez indirekt bizonyítéka annak, hogy egy idősor általában nem tekinthető független mintának, és a klasszikus statisztikához képest új elemzési eszközökre van szükségünk, ha idősorokat akarunk statisztikailag modellezni. A sztochasztikus folyamatok elméletéhez kell fordulnunk.

Egy diszkrét idejű sztochasztikus folyamat végtelen sok rendezett valószínűségi változó  $(\dots x_{-t}, \dots x_0, \dots x_t, \dots)$  összessége. Elemi esemény alatt itt egy végtelen trajektóriát értünk, vagyis egy végtelen sorozatot. Megelégedhetünk azzal a feltevessel, hogy az összes véges dimenziós együttes eloszlás létezését is feltételezzük. Ezért aztán természetesen értelmezhetők az olyan szokásos fogalmak, mint a peremeloszlások, a feltételes eloszlások, valamint a megfelelő momentumok. Az idősorlelemzésben központi szerepet tölt be az autokovariancia és autokorreláció függvény:

$$\text{cov}(x_t, x_{t-k}) = E(x_t x_{t-k}) - E(x_t)E(x_{t-k})$$

$$k = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

$$\text{cor}(x_t, x_{t-k}) = \frac{\text{cov}(x_t, x_{t-k})}{\sqrt{\text{var}(x_t)\text{var}(x_{t-k})}}.$$

### 2.2 Egy fontos alosztály: stacionárius idősorok

Az úgynevezett erősen stacionaritás folyamatok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az együttes eloszlásfüggvények csak a távolságtól függenek. Azaz minden  $k$ -ra, minden  $\tau$ -ra és minden  $t_1, \dots, t_k$ -ra:

$$F(x_{t_1+\tau}, \dots, x_{t_k+\tau}) = F(x_{t_1}, \dots, x_{t_k}).$$

A gyenge stacionaritás csak az első és második momentumokról tételezi fel ezt a csupán a távolságtól való függást:

$$E(x_{t+\tau}) = E(x_t),$$

$$\text{cov}(x_{t+\tau}, x_{t-k+\tau}) = \text{cov}(x_t, x_{t-k}).$$

Más megkülönböztetéseket is szokás tenni, például beszélhetünk átlagban való és kovariancia stacionaritásról is, az értelemszerű definíciókkal. Egy nagyon fontos egyszerű megfigyelés, hogy stacionárius idősorok lineáris kombinációi is mindig stacionáriusak. Stacionárius folyamat esetén beszélhetünk  $k$ -ad rendű autokovariancia mátrixokról, amelyek szimmetrikusak, és pozitív definiték. Például

$$\begin{bmatrix} \text{var}(x_t) & \text{cov}(x_t, x_{t+1}) \\ \text{cov}(x_{t+1}, x_{t+2}) & \text{var}(x_{t+1}) \end{bmatrix}.$$

szimmetrikus, vagyis  $\text{cov}(x_{t-1}, x_t) = \text{cov}(x_t, x_{t+1})$ , és ráadásul  $\text{var}(x_t) = \text{var}(x_{t+1})$ . A szokásos jelölések stacionárius folyamatoknál a következők:  $\gamma_0$  jelöli a varianciát, és  $\gamma_{-k} = \gamma_k$  a  $k$ -adik autokovarianciát.

A legegyszerűbb stacionárius sztochasztikus folyamat a fehér zaj:

$$\begin{aligned} E(\epsilon_t) &= 0 \\ E(\epsilon_t \epsilon_{t'}) &= 0, t \neq t' \\ \text{var}(\epsilon_t) &= \sigma^2 < \infty. \end{aligned}$$

Gyakran élünk azzal a feltevéssel, hogy a fehér zaj gauss-i, azaz normális eloszlású változókból áll.

Stacionárius változókból "konstruálhatunk" nem-stacionárius változókat. Például a talán legismertebb nem-stacionárius folyamat a véletlen bolyongás:

$$w_t = w_{t-1} + \epsilon_t,$$

ahol  $\epsilon_t$  fehér zaj.

A stacionárius folyamatok egy fontos alosztálya az átlagban ergodikus folyamatok. Ezek olyan  $X_t$  stacionárius folyamatok, amelyekre teljesül a

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{t=1}^T X_t}{T} = \mu,$$

összefüggés, ahol  $\mu$  a folyamat várható értéke. Tehát egy adott realizációból konzisztens becslést kaphatunk a várható értékre. Belátható, hogy

$$\sum_{i=0}^{\infty} \text{abs}(\gamma_i) < \infty$$

esetén a folyamat ergodikus. (Ilyenkor az autokovarianciák gyorsan tartanak a 0-hoz, vagyis a nagyon távoli időpontokhoz tartozó változók gyakorlatilag korrelálatlanok.) Hasonlóan definiálható a variancia-ergodikus folyamat.

Az ergodicitás jelentését értelmezhetjük, ha találunk nem-ergodikus stacionárius folyamatot. Álljon itt a következő példa:

$$X_t = X + \epsilon_t,$$

ahol  $\epsilon_t$  fehér zaj és  $\text{cov}(X, \epsilon_t) = 0$ ,  $\text{var}(\epsilon_t) = \sigma^2$ ,  $\text{var}(X) = \xi^2$ . Ekkor

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(X) \\ \text{var}(X_t) &= \xi^2 + \sigma^2 \\ \text{cov}(X_t, X_{t+k}) &= \xi^2. \end{aligned}$$

Viszont

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum^T X_t}{T} = X,$$

vagyis a folyamat minden egyes trajektóriájának átlaga az  $X$  megfelelő realizációjához, és nem a konstans  $E(X)$ -hez konvergál. Más szóval, ahhoz, hogy megbecsüljük a folyamat várható értékét a folyamat sok különböző realizációját kellene megfigyelnünk.

A következőkben, bár stacionárius folyamatokról fogunk beszélni, ezek ergodikusak is lesznek. A gazdasági idősorok általában nem reprodukálhatóak (vagyis nem kísérletiek), tehát nincs sok remény statisztikai elemzésükre az ergodicitás feltevése nélkül.

### 2.2.1 Mozgóátlag (MA (q)) folyamatok

Egy fehér zajból könnyen építhetünk olyan stacionárius folyamatot, amely nem-0 autokorrelációkkal rendelkezik. Ilyenek a mozgóátlag (MA (q)) folyamatok.

$$x_t = u_t + \beta_1 u_{t-1} + \dots + \beta_q u_{t-q},$$

ahol  $u_t$  fehér zaj.

#### Az MA (1) folyamat

$$x_t = u_t + \beta u_{t-1},$$

ahol

$$\begin{aligned} \text{var}(u_t) &= \sigma^2, \\ E(u_t u_{t'}) &= 0, t \neq t'. \end{aligned}$$

Nyilván igaz, hogy

$$E(x_t) = 0,$$

továbbá

$$\begin{aligned} E(x_t u_t) &= \sigma^2 \\ E(x_t u_{t-1}) &= \beta \sigma^2 \\ E(x_t^2) &= E(x_t u_t) + \beta E(x_t u_{t-1}). \end{aligned}$$

Legyen

$$\gamma_0 = E(x_t^2).$$

a folyamat varianciája.

A fentiekből könnyen kiszámítható, hogy

$$\gamma_0 = \sigma^2(1 + \beta^2).$$

Továbbá, ha

$$E(x_t x_{t-1}) = \gamma_1,$$

akkor

$$\begin{aligned} E(x_t x_{t-1}) &= E((u_t + \beta u_{t-1})(u_{t-1} + \beta u_{t-2})) \\ \gamma_1 &= \beta \sigma^2. \\ \gamma_k &= 0, k > 1. \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek felfoghatók az MA (1) folyamat paraméterei  $(\beta, \sigma^2)$  és az autokovariancia függvény közti összefüggéseknek. Ebből az elsőrendű autokorrelációra

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \\ \rho_1 &= \frac{\beta}{1 + \beta^2} \end{aligned}$$

adódik.

Belátható, hogy  $\rho_1$  abszolút értékben nem nagyobb, mint  $\frac{1}{2}$ . Ezért ha az egyenletet  $\beta$ -ban tekintjük, akkor  $\beta_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\rho_1^2}}{2\rho_1}$  két valós gyököt találunk. Az egyik kisebb, a másik pedig nagyobb abszolút értékben, mint 1. Sőt látható, hogy  $\beta_1 \beta_2 = 1$ , tehát  $\beta_2 = \frac{1}{\beta_1}$ . Vagyis két olyan  $\beta$  és ennek megfelelő  $\sigma^2$  létezik, ami ugyanazt a folyamatot reprezentálja.

### Általános MA (q) folyamat

$$x_t = u_t + \sum_{i=1}^q \beta_i u_{t-i}.$$

Ismét könnyen látható, hogy az autokovarianciák eltűnnek a legmagasabb fokú tag után.

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sigma^2(1 + \sum_{i=1}^q \beta_i^2) \\ \gamma_k &= \sigma^2(\beta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \beta_i \beta_{i+k}), k = 1, \dots, q \\ \gamma_k &= 0, k > q. \end{aligned}$$

A paraméterek és autokovarianciák közötti kapcsolat nemlineáris (és nem kölcsönösen egyértelmű).



### MA(q) folyamat nem-0 várható értékkel

$$x_t = C + u_t + \beta_1 u_{t-1} + \dots + \beta_q u_{t-q}.$$

Ekkor

$$E(x_t) = C,$$

és ha  $y_t = x_t - C$ , akkor

$$y_t = u_t + \beta_1 u_{t-1} + \dots + \beta_q u_{t-q}$$

0 várható értékű MA(q) folyamat.

### 2.2.2 Autoregresszív (AR (p)) folyamatok

Mint látni fogjuk itt is fehér zajból építkezünk, de nem mindig kapunk stacionárius folyamatot eredményként.

#### Az AR (1) folyamat

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \epsilon_t.$$

ahol  $\epsilon_t$  fehér zaj  $\sigma^2$  varianciával.

Tegyük fel, hogy a folyamat stacionárius. Ekkor

$$E(x_t) = 0,$$

amennyiben  $\alpha_1 \neq 1$ . Viszont  $\alpha_1 = 1$  esetén a folyamat nem-stacionárius. Mivel

$$\begin{aligned} E(x_t \epsilon_t) &= \sigma^2, \\ E(x_t^2) &= \alpha_1 E(x_{t-1} x_t) + E(x_t \epsilon_t), \\ \gamma_0 &= \alpha_1 \gamma_1 + \sigma^2, \\ E(x_{t-1} x_t) &= \gamma_1 = \alpha_1 \gamma_0, \end{aligned}$$

az autokovariancia függvényre:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{1 - \alpha_1^2} \sigma^2, \\ \gamma_k &= \alpha_1^k \gamma_0. \end{aligned}$$

Tanulságos egy másik levezetést is megfontolnunk. Iterációval azt kapjuk, hogy

$$x_t = \alpha_1^k x_{t-k} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_1^i \epsilon_{t-i}.$$

Ezért, ha mindkét oldalt szorozzuk  $x_{t-k}$ -val, várható értéket képezünk és figyelembe vesszük a stacionaritást:

$$E(x_t x_{t-k}) = \alpha_1^k \gamma_0,$$

$$\gamma_i = \frac{\alpha_1^k}{1 - \alpha_1^2} \sigma^2, k = 1, 2, \dots$$

adódik ismét. Ha  $\text{abs}(\alpha_1) < 1$ , akkor a folyamat stacionárius, és az autokovarianciák a 0-hoz konvergálnak exponenciálisan.

### AR (p) folyamatok

$$x_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i} + \epsilon_t.$$

ahol  $\epsilon_t$  fehér zaj  $\sigma^2$  varianciával. Ez egy sztochasztikus p-edrendű lineáris differenciaegyenlet. (Lásd Függelék.)

**Az autokovariancia függvény meghatározása: a Yule-Walker egyenletek** Induljunk ki a

$$x_t = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i} + \epsilon_t$$

összefüggésből. Mindkét oldalt  $\epsilon_t$ -vel szorozva és várható értékre áttérve:

$$E(x_t \epsilon_t) = \sigma^2.$$

Majd  $x_t$ -vel szorozva és várható értékre áttérve:

$$\gamma_0 = \alpha_1 \gamma_1 + \dots + \alpha_p \gamma_p + \sigma^2.$$

Mindkét oldalt  $x_{t-k}$ -val ( $k = 1, \dots, p$ ) szorozva és várható értékre áttérve kapjuk, hogy

$$\gamma_k = \alpha_1 \gamma_{k-1} + \dots + \alpha_p \gamma_{k-p},$$

ahol a stacionaritás miatt:

$$\gamma_{k-p} = \gamma_{p-k}.$$

Ez egy  $p + 1$  változós lineáris egyenletrendszer, amiből megoldhatók az ismeretlen  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$  értékek. Az autokorrelációkat ( $\rho_k$ ) a  $\gamma_0$ -val való osztással kapjuk.

Amikor  $k > p$  az alábbi differenciaegyenletet elégítik ki az autokovarianciák:

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \gamma_{k-i},$$

illetve az autokorrelációk:

$$\rho_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \rho_{k-i}.$$

Az (ergodikus) stacionaritás szükséges feltétele, hogy ez a differenciaegyenlet aszimptotikusan stabil legyen, vagyis az autokorrelációk a 0-hoz konvergáljanak. (Lásd Függelék.)

### AR(p) nem-nulla várható értékkel

$$x_t = C + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + \epsilon_t.$$

Ekkor legyen  $\mu = E(x_t)$ .

$$\begin{aligned} \mu &= C + (\alpha_1 + \dots + \alpha_p)\mu. \\ \mu &= \frac{C}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p}. \end{aligned}$$

Ha áttérünk az  $y_t = x_t - \mu$  változóra, akkor

$$y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \dots + \alpha_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

Az eddigieket összefoglalhatjuk az alábbi három állításban:

1. Egy MA(q) folyamat mindig stacionárius.
2. Egy MA(q) folyamat reprezentációja általában nem egyértelmű.
3. Egy AR(p) folyamat nem mindig stacionárius, a stacionaritás a paraméterektől függ.

### 2.2.3 Parciális autokorreláció

Az egyváltozós idősorelemzésben nagy hasznát vesszük egy fontos fogalomnak, a parciális autokorrelációnak.

Általában egy  $y$  valószínűségi változó lineáris projekciója  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -re az lábbi formulákkal definiálható:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \beta \mathbf{x}, \\ \text{cov}(\bar{y}, \mathbf{x}) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

A lineáris projekcióról belátható, hogy a legkisebb várható négyzetes eltérés értelmében ez  $y$  legjobb lineáris közelítése az  $\mathbf{x}$  vektorral.

Legyen  $\widehat{y_{-i}}$  az  $y$  projekciója az  $x_{-i}$  vektorra ( $x_{-i}$  :  $x$ -ből kihagyjuk  $x_i$ -t), és  $\widehat{x_{-i}}$  az  $x_i$  projekciója az  $x_{-i}$  vektorra. Ekkor képezzük az elméleti reziduumokat, mint

$$\begin{aligned}\widetilde{y_{-i}} &= \widetilde{y_{-i}} - y \\ \widetilde{x_{-i}} &= \widetilde{x_{-i}} - x_i.\end{aligned}$$

Parciális kovarianciának (korrelációnak) nevezzük a

$$\begin{aligned}pcov_{x_{-i}}(y, x_i) &= cov(\widetilde{y_{-i}}, \widetilde{x_{-i}}), \\ pcor_{x_{-i}}(y, x_i) &= cor(\widetilde{y_{-i}}, \widetilde{x_{-i}})\end{aligned}$$

mennyiségeket.

Láthatóan két változó parciális korrelációja függ attól, hogy milyen egyéb változók tartoznak az  $\mathbf{x}$  vektorhoz. Azonban a parciális autokovariancia (autokorreláció) fogalma már egyértelmű:

$$\begin{aligned}pacov_k(x_t, x_{t-k}) &= pcov_{x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k+1}}(x_t, x_{t-k}), \\ pacor_k(x_t, x_{t-k}) &= pcor_{x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-k+1}}(x_t, x_{t-k}).\end{aligned}$$

Az "egyértelműség kulcsa", hogy az egyéb változók mindig a két időpont közti időpontokhoz tartozó változók. Míg az autokorreláció lényegében azt fejezi ki, hogy milyen (lineáris) információt ad egy  $k$ -távolságú megfigyelés a mai értékéről egy idősornak, addig a parciális autokorreláció azt mutatja meg, hogy van-e pótlólagos információ tartalma a  $k$ -távolságú megfigyelésnek akkor, ha az összes közbenső megfigyelésnek is birtokában vagyunk.

## 2.2.4 Általánosítás: ARMA (p,q) folyamatok

A Függelékben leírt késleltetési operátor elmélet jelöléseivel egy ARMA folyamatot a következőképpen definiálhatunk:

$$A(L)x_t = B(L)\epsilon_t$$

ahol  $A(L)$  és  $B(L)$  véges késleltetési polinomok, és  $\epsilon_t$  fehér zaj. Ekkor, ha létezik  $A^{-1}(L)$ , akkor

$$x_t = A^{-1}(L)B(L)\epsilon_t$$

stacionárius, és ezt a folyamat végtelen MA reprezentációjának nevezzük.

Ha létezik  $B^{-1}(L)$ , akkor

$$B^{-1}(L)A(L)x_t = \epsilon_t$$

és a folyamatot invertálhatónak nevezzük. Ez egy végtelen AR reprezentációnak felel meg. Könnyen látható, hogy amennyiben  $C(L)$  egy invertálható polinom, akkor

$$C(L)A(L)x_t = C(L)B(L)\epsilon_t,$$

tehát az ARMA reprezentáció nem egyértelmű. Azt mondjuk, hogy  $A(L)$  és  $B(L)$  nem tartalmaznak közös faktort, ha nem létezik  $C'(L)$ , amelyre

$$\begin{aligned} C(L)A'(L) &= A(L), \\ C(L)B'(L) &= B(L). \end{aligned}$$

Ilyen reprezentáció is mindig létezik és egyértelmű.

**Parciális autokorreláció AR és MA modelleknél** Mint láttuk egy AR(p) folyamat autokorrelációi exponenciálisan tartanak a 0-hoz, de csak közelítik azt. Ez jól látszik a végtelen MA reprezentációból, az  $x_t$  és  $x_{t-k}$  végtelen mozgóátlagának van közös része, a  $t - k - 1$  és azt megelőző tagok. Ugyanakkor az MA (q) folyamatban az autokorreláció  $q$  késleltetés után eltűnik. A parciális autokorrelációra viszont mindez megfordítva igaz, feltéve, hogy az MA folyamat invertálható. Az ilyenkor létező végtelen AR reprezentáció azt állítja, hogy bármely véges lineáris projekcióban a késleltetések együtthatói nem-0-k. Mindeközben a  $p + 1$  és annál hosszabb késleltetések együtthatói az AR(p) folyamatokban definíció szerint 0-k.

#### ARMA (p,q) nem-0 várható értékkel

$$\begin{aligned} A(L)x_t &= C + B(L)\epsilon_t, \\ \mu &= (1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p)^{-1}C \\ y_t &= x_t - \mu \\ A(L)y_t &= B(L)\epsilon_t. \end{aligned}$$

A legegyszerűbb nem-triviális ARMA az ARMA(1,1) folyamat,

$$x_t = C + \alpha x_{t-1} + \epsilon_t + \beta \epsilon_{t-1},$$

ahol  $abs(\alpha) < 1$  a stacionaritás szükséges és elégséges feltétele.

#### 2.2.5 Kovariancia stacionárius folyamat időtartománybeli reprezentációja

Az ARMA modellek bevezetésének indoklásaképpen gyakran hivatkoznak a következő állításra (Wold Reprezentációs Tétel): minden kovariancia stacionárius idősor felírható

$$x_t = f(t) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon_{t-i},$$

alakban, ahol  $f(t)$  valamilyen determinisztikus függvény,  $\varepsilon_t$  fehér zaj és  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$ . Az ARMA folyamatok nyilván csak egy részosztálya ennek a folyamatstípusnak, ahol a végtelen  $a_i$  paramétert véges sok AR és MA paraméterrel "fejezzük ki".

## 2.3 ARMA modellek vizsgálata: a Box-Jenkins analízis

Az ARMA modellek statisztikai vizsgálata eredetileg Box és Jenkins nevéhez fűződik. Az ő statisztikai algoritmusok alapvetően négy elemet tartalmazott:

1. lépés (identifikáció): keresünk stacionárius idősort és megsejtjük az AR és MA fokszámokat.
2. lépés (becslés): megbecsülünk egy vagy több ARMA modellt.
3. lépés (diagnosztikus tesztelés): a modelleket teszteknek vetjük alá, amelyek alapján kiválasztjuk a legjobbat.
4. lépés (előrejelzés): a legjobb modellel előrejelzést számítunk, illetve meghatározzuk az előrejelzés hibáját.

### 2.3.1 Identifikáció

Az ARMA folyamatok esetében, mint láttuk, az autokorrelációs függvény (ACF) exponenciálisan tart 0-hoz. Továbbá az AR és MA tagok különböző jellegű "mintákat" generálnak az ACF és PACF (parciális autokorreláció függvényekben). Az eredeti Box-Jenkins identifikáció alapvető eleme volt az elméleti ACF és PACF becslése, majd ezek vizuális "inspekciója", és néhány általános teszt alapján annak eldöntése, hogy a folyamat stacionárius-e (pontosabban van-e esély arra, hogy ARMA-ként modellezhető), illetve, hogy milyen fokszámú AR és MA tagokat tartunk lehetségesnek. Az identifikáció nagy részben megérzésen és ítéletalkotási képességen (tapasztalaton) alapuló sejtések eredménye, de a stacionaritás eldöntésére léteznek formális tesztek. Ezek általában nem stacionaritást, mint nullhipotézist tesztelnek, hanem azt, hogy a folyamatban van-e egységgyök, vagyis az  $A(L)$  polinomnak van-e 1-es gyöke. Például az egyszerű Dickey-Fuller teszt esetében a teszttegyenlet:

$$x_t = C + \alpha x_{t-1} + At + u_t.$$

Az egységgyök tesztelése itt ekvivalens az  $\alpha = 1$  nullhipotézis tesztelésével. Az egységgyök tesztekéről bővebben lásd "Darvas Zsolt: Bevezetés az idősoelemzés fogalmaiba", 31-57. oldalak. A gyakorlatban leggyakrabban a kiterjesztett (augmented) Dickey-Fuller tesztet szokás használni, ahol a jobboldalon több késleltetés szerepel.

**Az ACF és PACF becslése** A mintaátlag, a minta variancia, a minta autokovariancia és a minta autokorreláció

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum x_t,$$

$$acov_0^s = \frac{1}{T} \sum (x_t - \bar{x})^2,$$

$$acov_k^s = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}),$$

$$acor_k^s = \frac{acov_k^s}{acov_0^s},$$

az ergodikus esetben konzisztens becslőfüggvények.

Fehér zaj folyamat esetén a minta autokorrelációk aszimptotikusan normális eloszlásúak  $1/T$  varianciával. Ebből lehet konfidencia intervallumot számolni ezekre, illetve tesztelni azt a nullhipotézist, hogy valamely autokorreláció 0.

A Box-Pierce statisztikát annak a nullhipotézisnek a tesztelésére alkották meg, hogy az első  $m$ -darab autokorreláció 0.

$$Q_{BP} = T \sum_{k=1}^p r_k^2.$$

Aszimptotikusan  $\chi_{m-k}^2$  eloszlású. A Ljung-Box statisztikát ma gyakrabban használják, mivel kis mintákban jobbak a tulajdonságai, miközben ugyanaz az aszimptotikus eloszlás:

$$Q_{LB} = (T+2)T \sum_{k=1}^p \frac{r_k^2}{T-k}.$$

A parciális autokorreláció természetes becslése, ha az elméleti projekció helyett annak gyakorlati megfelelőjét alkalmazzuk, azaz egy OLS regressziós becslést végzünk  $x_t$ -re önmaga késleltetéseivel, mint regresszorokkal.

Legyen  $b_k$  a

$$\hat{x}_t = \sum_{i=1}^k b_i x_{t-i}$$

empirikus projekció (lineáris regresszió) utolsó együtthatója.

Mivel

$$var(\widetilde{x_{t-k}}) = var(\widetilde{x_t})$$

$$b_k = \frac{cov(\widetilde{x_t}, \widetilde{x_{t-k}})}{var(\widetilde{x_{t-k}})} \frac{\sqrt{var(\widetilde{x_{t-k}})}}{\sqrt{var(\widetilde{x_t})}} = \rho_k,$$

Tehát

$$p_k^p = \frac{cov(\widetilde{x_{t-k}}, \widetilde{x_t})}{var(\widetilde{x_t})}.$$

Például a parciális korrelációk következőképpen számíthatók az MA(1) esetben:

Az első tag:

$$\rho_1^p = acor_1$$

A második tag:

Keressük a

$$\hat{x}_t = \omega_{11}x_{t-1} + \omega_{22}x_{t-2}$$

regresszió paramétereit.

A normál egyenletek:

$$\begin{aligned} E(x_t x_{t-1}) &= \omega_{12}E(x_{t-1}^2) + \omega_{22}E(x_{t-1}x_{t-2}) \\ E(x_t x_{t-2}) &= \omega_{12}E(x_{t-1}x_{t-2}) + \omega_{22}E(x_{t-2}^2) \end{aligned}$$

vagyis a stacionaritás miatt:

$$\begin{aligned} acov_1 &= \omega_{12}acov_0 + \omega_{22}acov_1 \\ acov_2 &= \omega_{12}acov_1 + \omega_{22}acov_0. \end{aligned}$$

Összunk  $acov_0$ -val:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \omega_{12} + \omega_{22}\rho_1 \\ 0 &= \omega_{12}\rho_1 + \omega_{22}. \end{aligned}$$

A megoldás:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_{12} \\ \omega_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \rho_1^p &= \omega_{22}. \end{aligned}$$

Általánosan:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_{1k} \\ \omega_{kk} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ 0 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \rho_k^p &= \omega_{kk}. \end{aligned}$$

### 2.3.2 ARMA folyamatok becslése

**Momentumok módszere** Az AR(p) esetben a Yule-Walker egyenletekből becsülhetők a paraméterek. Kiszámoljuk az empirikus autokovarianciákat és megoldjuk a Yule-Walker egyenletekből az AR paramétereket.



**Feltételes legkisebb négyzetek módszere** Vegyünk egy konkrét példát, az ARMA (1,1) modellt:

$$u_t = x_t - \alpha x_{t-1} - \beta u_{t-1}.$$

A legkisebb négyzetek probléma szokásos megfogalmazása:

$$\min_{\alpha, \beta} \sum_{t=2}^T u_t^2.$$

Az  $u_t$  reziduumokat csak  $t = 2$ -től tudjuk felírni, tehát  $x_1$  feltétellel. De ehhez is kell  $u_1$ . Feltesszük hogy  $u_1 = 0$  (ami a várható érték). Ha  $\beta = 0$  (tisztan AR eset), akkor lineáris regressziót kell becsülnünk, egyébként nemlineáris optimalizációs problémát kell megoldani.

**Maximum Likelihood becslés** Gyakori feltevés, hogy a sokkok (innovációk) normális eloszlásúak. Mint tudjuk a többdimenziós (centralizált) normális sűrűségfüggvény

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{\mathbf{y}'\Sigma^{-1}\mathbf{y}}{2}\right)$$

alakú. Emlékeztetünk a feltételes valószínűség definíciójára:

$$f(x, y) = f(x | y) f(y).$$

Ekkor például az AR(1) esetben:

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_T) &= f_{y_T|y_{T-1}, \dots, y_1} * f(y_1, \dots, y_{T-1}) \\ f(y_1, \dots, y_{T-1}) &= f_{y_{T-1}|y_{T-2}, \dots, y_1} * f(y_1, \dots, y_{T-2}) \\ &\dots \\ f(y_1, \dots, y_T) &= f_{y_1} * f_{y_2|y_1} * \dots * f_{y_{T-1}|y_{T-2}, \dots, y_1} * f_{y_T|y_{T-1}, \dots, y_1} \end{aligned}$$

A feltételes eloszlások:

$$y_t | y_{t-1}, \dots \sim N(\alpha y_{t-1}, \sigma^2).$$

Az  $y_1$  változóra viszont nem tudunk így feltételes eloszlást felírni. Viszont ismerjük  $y_1$  feltétel nélküli eloszlását:

$$y_1 \sim N\left(0, \frac{1}{1-\alpha^2}\sigma^2\right).$$

A megfelelő normális sűrűség függvények szorzata megadja a likelihood-függvényt  $\alpha$  és  $\sigma$  függvényében egy adott mintára.

Ez könnyen általánosítható AR(q)-ra. Ha vannak MA tagok, akkor a likelihood függvény kifejezése bonyolultabb, és numerikusan kell megoldani a likelihood maximalizálási problémát.

### 2.3.3 Diagnosztikák és modell választás

Általában a reziduumok normalitását (például a Jarque-Bera teszttel), és autokorrelálatlanságát (Ljung-Box teszttel) teszteljük, amelyek közül az utóbbi az alapvetőbb. Továbbá szokás valamilyen információs kritériumot (Akaike vagy Schwartz) is használni a modellek közötti választásra.

### 2.3.4 ARMA folyamatok előrejelzése

Monstantól feltesszük, hogy a folyamat paraméterei pontosan ismertek, vagyis a becslésből adódó bizonytalansággal nem foglalkozunk. Feltesszük, hogy rendelkezésünkre állnak  $x_1, \dots, x_T$  adatok és az előrejelzés  $\tilde{x}_{T+i}$ , ahol  $i > 0$ . Adott egy invertálható ARMA (p,q) folyamat

$$A(L)x_t = B(L)\epsilon_t$$

alakban. Ekkor léteznek  $A^{-1}(L)$  (stacionaritás) és  $B^{-1}(L)$  (invertálhatóság), vagyis a végtelen MA és végtelen AR alakok:

$$A(L)x_t = A^{-1}(L)B(L)\epsilon_t,$$

$$B^{-1}(L)A(L)x_t = \epsilon_t.$$

#### Egy egyszerű eset: AR (1) folyamatok előrejelzése

$$x_{T+1} = \alpha_1 x_T + \epsilon_{t+1}.$$

Általában tudjuk (ez független az idősorlemezési kontextustól), hogy az

$$E(y - \tilde{y})^2$$

(az előrejelzési hiba négyzetének várható értéke) akkor minimális, ha

$$\tilde{y} = E(y | x).$$

Ebből következik, hogy az AR(1) esetben az egylépéses optimális előrejelzésünk:

$$x_{T+1} = \alpha_1 x_T.$$

A kétlépéses pedig:

$$\begin{aligned} x_{T+2} &= \alpha_1 x_{T+1} + \epsilon_{t+2} \\ &= \alpha_1 E(x_{T+1} | x_T) + \alpha_1 \epsilon_{T+1} + \epsilon_{T+2} \\ \tilde{x}_{T+2} &= E(x_{T+2} | x_T) = \alpha_1^2 x_T \end{aligned}$$

Nagyobb m-re az általánosítása ennek a formulának nyilvánvalóan:

$$\tilde{x}_{T+m} = \alpha_1^m x_T.$$

Kiszámolhatjuk az előrejelzések várható négyzetes hibáját is. Egylépésben:

$$P^{(1)} = E(x_{T+1} - \alpha_1 x_T)^2 = E(\epsilon_{T+1})^2 = \sigma^2.$$

(Az egylépéses előrejelzés hibája az "alapvető" fehér zaj varianciája.)

A kétlépés előrejelzés várható négyzetes hibája:

$$P^{(2)} = E(\alpha_1 \epsilon_{T+1} + \epsilon_{T+2})^2 = (1 + \alpha_1^2) \sigma^2.$$

Láthatóan az előrejelzési hiba MA(1) folyamat,  $\alpha_1$  paraméterrel.

Általánosítsunk  $m$ -re:

$$P^{(m)} = (1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^4 + \dots + \alpha_1^{2m-2}) \sigma^2.$$

Ha  $m$  tart a végtelenbe, akkor

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (P^{(m)}) = (1 + \alpha_1^2 + \alpha_1^4 + \dots + \alpha_1^{2m-2}) \sigma^2 = \frac{1}{1 - \alpha_1^2} \sigma^2 = \gamma_0.$$

Az  $m$  lépéses előrejelzési hiba  $MA(m-1)$   $\alpha_1^2, \alpha_1^4, \dots, \alpha_1^{2m-2}$  paraméterekkel. Tehát a távolság növekedésével növekszik az előrejelzés várható négyzetes hibája, és tart a folyamat varianciájához. (Mindenképpen nagyobb, mint  $\sigma^2$ .)

Ezek az eredmények általánosíthatók ARMA folyamatra is.

**ARMA előrejelzés az AR(végtelen) és MA(végtelen) formákból** Az AR(végtelen) alak:

$$x_t = - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x_{t-i}$$

és az MA(végtelen) alak:

$$x_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}.$$

Tekintsük azt az egylépéses előrejelzést, ami a végtelenül hosszú múlt függvénye. Belátható, hogy az optimális lineáris előrejelzés a várható négyzetes hiba minimalizálása értelmében nem más, mint a  $T$ . időszakban vett feltételes várható értéke  $x_{T+1}$ . időszaki értékének. Itt a feltételbe az egész  $x_T, x_{T-1}, \dots, x_{T-k}, \dots$  "történelem" beletartozik.

$$\tilde{x}_{T+1} = - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x_{T+1-i} = -\pi_1 x_T - \dots - \pi_k x_{T-k+1} \dots$$

ahol  $\pi_k$  a végtelen AR paraméterei.

Másfelől igaz, hogy

$$\tilde{x}_{T+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \epsilon_{T+1-i} = \psi_1 \epsilon_T + \dots + \psi_k \epsilon_{T-k+1} \dots$$

ahol a  $\psi$ -k a végtelen MA paraméterei.  
Tehát

$$x_{T+1} - \tilde{x}_{T+1} = \epsilon_{T+1}$$

és

$$P^{(1)} = E(\epsilon_{T+1})^2 = \sigma^2.$$

Vagyis most is igaz, hogy az egy-lépéses előrejelzési hiba fehér zaj.  
Az  $m$  lépéses előrejelzés hasonlóképpen:

$$\tilde{x}_{T+m} = -\pi_1 \tilde{x}_{T+m-1} - \dots - \pi_{m-1} \tilde{x}_{T+1} - \pi_m x_T - \dots - \pi_{m+k} x_{T-k} \dots,$$

azaz a  $T+m$ -beli várható érték  $T$ -ben.  
Ez felírható, mint

$$\tilde{x}_{T+m} = \psi_m \epsilon_T + \dots + \psi_{m+k} \epsilon_{T-k} + \dots$$

Mivel

$$x_{T+m} = \epsilon_{T+m} + \psi_1 \epsilon_{T+m-1} + \dots + \psi_{m-1} \epsilon_{T+1} + \psi_m \epsilon_T + \dots + \psi_{m+k} \epsilon_{T-k} + \dots$$

ezért

$$x_{T+m} - \tilde{x}_{T+m} = \epsilon_{T+m} + \psi_1 \epsilon_{T+m-1} + \dots + \psi_{m-1} \epsilon_{T+1}.$$

Tehát a többlépéses előrejelzési hiba is  $MA(m-1)$  folyamat.  
Ebből:

$$P^{(m)} = \sigma^2 \left( \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j^2 \right).$$

és.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P^{(m)} = \gamma_0.$$

Tehát az előrejelzést az AR(végtelen) alakból számolhatnánk, míg az előrejelzés várható hibáját az MA(végtelen) formából következtethetjük ki.

A végtelen múltból való előrejelzés nem megvalósítható a gyakorlatban, de ha az  $x_1$ -nél korábbi megfigyelések értékeit 0-nak tekintjük, akkor az invertibilitási feltevés miatt a torzítás kicsi, ha  $T$  nagy.

### Alkalmazás: ARMA (1,1) folyamat előrejelzése

$$x_t = \alpha x_{t-1} + \epsilon_t + \beta \epsilon_{t-1}.$$

Ekkor

$$x_{T+1} = \alpha x_T + \epsilon_{T+1} + \beta \epsilon_T.$$

Az előrejelzés (feltételes várható érték):

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{T+1} &= \alpha x_T + \beta \tilde{\epsilon}_T. \\ \tilde{x}_{T+k} &= \alpha \tilde{x}_{T+k-1}, k = 2, \dots, m.\end{aligned}$$

Meg kell határozni a  $\tilde{\epsilon}_T$  előrejelzést is.

$$\tilde{\epsilon}_T = x_1 - \alpha x_{t-1} - \beta \tilde{\epsilon}_{T-1}.$$

Eljutunk iteratíván  $\tilde{\epsilon}_1$ -ig:

$$\tilde{\epsilon}_1 = x_1 - \alpha x_0 - \beta \tilde{\epsilon}_0.$$

Nincs megfigyelésünk  $x_0$ -ról, és  $\epsilon_0$ -ról nincs információnk. Helyettesítsük őket a feltétel nélküli várható értékükkel, 0-val! Ekkor

$$\tilde{\epsilon}_1 = x_1.$$

**A BLP (legjobb lineáris predikció) koeficiensek általában** Keressük a

$$\tilde{x}_{T+m} = \pi_1^{(m)} x_T + \dots + \pi_T^{(m)} x_1,$$

összefüggés paramétereit, amire

$$E(x_{T+m} - \tilde{x}_{T+m})^2 = E(x_{T+m}^2) - 2E(x_{T+m} \tilde{x}_{T+m}) + E(\tilde{x}_{T+m}^2)$$

minimális lesz. Tehát "megvalósítható" legjobb előrejelzést keresünk, véges számú megfigyelés felhasználásával m-lépésre előre.

Az elsőrendű feltételek:

$$\frac{\partial}{\partial \pi_i^{(m)}} \left[ E(\pi_1^{(m)} x_T + \dots + \pi_T^{(m)} x_1)^2 - 2E(x_{T+m}(\pi_1^{(m)} x_T + \dots + \pi_T^{(m)} x_1)) \right] = 0.$$

$\pi_1^{(m)}$  szerint:

$$\gamma_m = \pi_1^{(m)} \gamma_0 + \pi_2^{(m)} \gamma_1 + \dots + \pi_T^{(m)} \gamma_{T-1},$$

és általában:

$$\gamma_{k+m-1} = \sum_{j=1}^T \pi_j^{(m)} \gamma_{k-j}, k = 1, \dots, T.$$

Ennek egy kompakt felírása:

$$\boldsymbol{\gamma}^{(m)} = \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\pi}^{(m)},$$

ahol  $\mathbf{\Gamma}$  a  $T \times T$ -s autokovariancia mátrix, és  $\boldsymbol{\gamma}^{(m)} = [\gamma_m, \dots, \gamma_{T+m-1}]$  egy  $T$  elemű vektor. Ennek a lineáris egyenletrendszernek a megoldása adja meg az optimális lineáris előrejelzés  $\boldsymbol{\pi}^{(m)}$  paramétereit.

Levezethető az  $m$ -lépéses előrejelzési hiba négyzetének várható értékére:

$$P^{(m)} = E(x_{T+m} - \mathbf{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}^{(m)} \mathbf{x}_T)^2 = \gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}^{(m)'} \mathbf{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}^{(m)}.$$

**Impulzus válasz függvények** Az

$$x_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i}$$

MA végtelen alakot szokás impulzus válasz függvénynek is nevezni. A  $\psi_i$  paramétert úgy interpretálhatjuk, hogy egységnyi  $t$ -időszaki impulzusnak (innovációnak, sokknak) mekkora a hatása  $x$ -re a  $t+i$  időszakban. Amennyiben egy impulzus "fennmarad", akkor az  $i$  periódusnyi fenntartott hatás:

$$1 + \psi_1 + \dots + \psi_i.$$

**A "backward" ARMA reprezentáció és "backcasting"** Legyen

$$x_t = \alpha x_{t-1} + \epsilon_t$$

és  $\epsilon_t$  fehér zaj  $\sigma^2$  varianciával. Ekkor az

$$x_t = \omega x_{t+1} + \epsilon_t$$

folyamatnak pontosan ugyanaz az autokovariancia függvénye (az autokovariancia függvény szimmetrikussága miatt), vagyis ez a "backward" folyamat is reprezentációja  $x_t$ -nek. Általában, ha

$$A(L)x_t = B(L)\epsilon_t$$

egy ARMA reprezentáció, akkor

$$A(F)x_t = B(F)\epsilon_t$$

ugyanannak a folyamatnak a reprezentációja. Ezért ugyanazokkal a paraméterekkel lehet "visszafelé" jelezni egy ARMA folyamatot, mint "előre".

Hogyan használható a "backcasting"?

A

$$x_t = - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i x_{t+i}$$

összefüggésből "meghatározható  $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-t}, \dots$ . Ezek hozzáilleszthetők az eredeti mintához, és felhasználhatók a becslésben (feltételes legkisebb négyzetek) vagy az előrejelzésben.

### 2.3.5 ARIMA (p,d,q) folyamatok

Gyakran egy idősor csak egy vagy két differenciálás után válik stacionáriussá. Vagyis  $x_t$  nem stacionárius, de  $(1-L)x_t$  vagy  $(1-L)^2 x_t$  már stacionárius. Ilyenkor a folyamatokat első vagy másodrendben integráltnak nevezzük, és azt mondjuk, hogy 1 illetve 2 egységgyökkel rendelkeznek. (A késleltetési polinomjuknak 1- illetve 2-szeres gyöke az 1.) Tehát például egy elsőrendben integrált ARMA folyamat felírható, mint

$$A(L)(1-L)x_t = B(L)\epsilon_t,$$

ahol létezik  $A^{-1}(L)$ . Amennyiben  $A(L)$   $p$ -ed fokú, és  $B(L)$   $q$ -ad fokú, akkor ezt a folyamatot  $ARIMA(p, 1, q)$ -nak nevezzük. Általában  $ARIMA(p, d, q)$  folyamatról beszélünk, ha  $d$  differenciálás után jutunk el először stacionárius folyamathoz. (A további differenciálások után mindig stacionárius folyamatot kapunk.) A gazdasági idősoroknál  $d > 2$  szinte ismeretlen.

**ARIMA (p,1,q) folyamat előrejelzése** Legyen  $\nabla \tilde{x}_{T+1}$  a stacionárius  $\nabla x_t = (1-L)x_t$  folyamatból származó előrejelzés  $\nabla \tilde{x}_{T+1} = \tilde{x}_{T+1} - \tilde{x}_T$ -re. Ekkor természetesen

$$\tilde{x}_{T+1} = x_T + \nabla \tilde{x}_{T+1}.$$

Ha a  $\nabla \tilde{x}_{T+1}$  előrejelzési hibája  $\epsilon_{T+1}$ , akkor ez ugyanúgy igaz  $\tilde{x}_{T+1}$  előrejelzési hibájára is, azaz annak varianciája  $E(\epsilon_{T+1})^2 = \sigma^2$ . A kétlépéses előrejelzés:

$$\tilde{x}_{T+2} = x_T + \nabla \tilde{x}_{T+1} + \nabla \tilde{x}_{T+2}.$$

Mivel  $\nabla \tilde{x}_{T+2}$  előrejelzési hibája  $\epsilon_{T+2} + \psi_1 \epsilon_{T+1}$  ezért  $\tilde{x}_{T+2}$  előrejelzési hibája:  $\epsilon_{T+1} + \epsilon_{T+2} + \psi_1 \epsilon_{T+1}$ . Ennek varianciája  $(2 + \psi_1^2 + 2\psi_1)\sigma^2$ . Jól látszik, hogy  $m$ -lépésben a hiba a megfelelő  $MA(m-1)$  folyamatok összege. A variancia nem azonos az egyes  $MA$  folyamatok varianciáinak összegével a közöttük levő korreláció miatt, de tart a végtelenbe. Ez utóbbi nyilván igaz marad  $ARIMA(p,d,q)$  folyamatokra is, ahol  $d > 0$ .

**Trendstacionárius és differencia-stacionárius folyamatok** Tegyük fel, hogy

$$x_t = At + u_t.$$

ahol  $u_t$  egy stacionárius ARMA. Ekkor

$$x_t - x_{t-1} = A + u_t - u_{t-1} = A + (1 - L)u_t.$$

Tehát  $x_t$  elsőrendben integrált, de nem-invertálható (a jobb oldalon egységgyökök van). Az ilyen folyamatokat trendstacionáriusnak nevezzük, mivel ha "kivonnánk" belőlük a determinisztikus trendet, akkor stacionárius folyamatot kapnánk differenciálás nélkül is. Ez egy speciális folyamat, amelynek a "korrekt" kezelése azt jelentené, hogy először "kibecsüljük" a determinisztikus trendet, és a maradékot elemezzük ARMA folyamatként.

A differencia és trendstacionárius idősorok megkülönböztetése az előrejelzés szempontjából nagyon fontos. Mint láttuk differencia stacionárius folyamatok előrejelzési hibájának varianciája az időtávval nő a végtelenbe. Ezzel szemben trend-stacionárius folyamatok előrejelzési hibájának varianciája egy véges értékhez tart, mint a stacionárius folyamatoké is.

Az egységgyökök létezésének tesztelésére szolgáló tesztek a tesztegyszerűségben fegyelembe veszik a trendstacionaritás lehetőségét is.

### 2.3.6 Hogyan elemezzünk egy idősort ARIMA-ként? (Ideiglenes összefoglaló)

1. Eddig három modell típusban gondolkodtunk: szintben stacionárius, differencia stacionárius, és trend stacionárius modellek. Az ábrákból, a becsült ACF-ből, valamint az egységgyökök tesztekéből következtethetünk arra, hogy melyikkel van dolgunk. El kell döntenünk azt is, hogy van-e 0-tól különböző várható érték. Stacionárius vagy trend stacionárius folyamatnál ez természetes feltevés, differencia stacionárius folyamatnál viszont megfontolandó, mivel kvalitatíve befolyásolja a hosszú távú előrejelzést. A következő lépés az ARMA identifikáció az ACF és PACF alapján. (Vagy az eredeti idősorra, vagy a differenciált idősorra, vagy a trendsűrt idősorra.)

2. A következő lépés a lehetségesnek tartott modellek becslése a feltételes legkisebb négyzetek módszerével, vagy a maximum likelihood módszerrel normalitást is feltételezve.

3. Ezután következik a diagnosztikák kiszámolása minden becsült modellre. A reziduumok normalitását és autokorrelálatlanságát teszteljük. Ha a normalitás nem teljesül, akkor előtérbe kerülhet a feltételes legkisebb négyzetek módszerével való újrabecslés. Ha nincs a diagnosztikák alapján elfogadható modell, akkor a reziduumok autokorrelációi alapján új identifikációra van szükség. Az elfogadható modellek közti választást információs kritériummal végezhetjük el.

4. A legjobb modellel előrejelzést készítünk, meghatározzuk az előrejelzési hibákat, és az impulzus válasz függvényt is elemezhetjük.



### 2.3.7 További modelltípusok

**Szezonális** Számos gazdasági idősor ábráját megvizsgálva azt találjuk, hogy ugyanabban a szezonban (havi idősoroknál ugyanabban a hónapban, negyedéves idősoroknál ugyanabban a negyedévben) sok hasonlóság van az idősoron belül. A becsült autokovariancia függvény ezt úgy támasztja alá, hogy a 4-nél vagy 12-nél (illetve ezek egész számú többszöröseinél) az autokovarianciál "kiugranak".

A szezonálisan kiugró autokorreláció természetesen nem mond ellent a stacionaritásnak, ha a szezonális autokorrelációk exponenciálisan tartanak 0-hoz, akkor egy ARMA típusú modell továbbra is elfogadható közelítés lehet. Számos lehetséges megoldás van arra, hogy hogyan lehet szezonális ARMA modellt specifikálni. A leggyakrabban elemzett modell a multiplikatív SARMA  $(p, q), (P^s, Q^s)$ , ahol  $s$  határozza meg a szezonaritást (4 a negyedéves, 12 a havi adatok esetén), és  $P^s, Q^s$  a szezonális AR és MA tagok száma.

$$A^s(L^s)A(L)x_t = B^s(L^s)B(L)\epsilon_t$$

Ha folyamat tisztán szezonális (azaz,  $p = 0, q = 0, P^s = 1, Q^s = 1$ ), akkor a folyamat a következő:

$$x_t = \alpha_s x_{t-s} + \epsilon_t + \beta_s \epsilon_{t-s}.$$

A hagyományos felírásban az  $A(L)$  és  $B(L)$  polinomok

$$\begin{aligned} A(L) &= (1 - \alpha_s L^s), \\ B(L) &= (1 + \beta_s L^s) \end{aligned}$$

lennének. Ebben a speciális esetben a stacionaritási feltétel az, hogy a

$$1 - \alpha_s L^s = 0$$

polinom gyökei legyenek abszolút értékben 1-nél nagyobbak. Mivel ez egy  $s$ -ed fokú polinom ezért  $s$  gyöke van.

Látszik, hogy  $abs(\alpha_s) < 1$  a stacionaritás feltétele. Nyilván az invertálhatóság feltétele  $abs(b_s) < 1$  lesz. Ha  $SARMA(1.1), (1_{12}.1_{12})$  modellünk van, akkor az idősor:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_{12} x_{t-12} + \alpha_{13} x_{t-13} + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \beta_{12} \epsilon_{t-12} + \beta_{13} \epsilon_{t-13}.$$

Ez egy egyszerű esete a következő ARMA modellnek, amikor a 13. késleltetés paramétereit függetlenül határozzuk meg.

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_{12} x_{t-12} + \alpha_{13} x_{t-13} + \beta_1 \epsilon_{t-1} + \beta_{12} \epsilon_{t-12} + \beta_{13} \epsilon_{t-13}.$$

Az így felírt modell általános ARMA formába írható:

$$A(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_{12} L^{12} - \alpha_{13} L^{13}$$

$$B(L) = 1 + \beta_1 L + \beta_{12} L^{12} + \beta_{13} L^{13}.$$

Vagyis indokolt a multiplikatív SARMA elnevezés, és annak külön (az ARMA modelleken belül speciális) modelleszaládként való kezelése.

Előfordulhat, hogy az idősor nem-stacionárius, de ez a nem-stacionaritás részben a szezonális egységyököknek tudható be, vagyis az  $A(L)$  polinom faktorizálható

$$A(L) = (1 - L^s)A'(L)$$

alakban. Ekkor  $s$  darab egységyökkel rendelkezünk legalább. Persze az is előfordulhat, hogy

$$A(L) = (1 - L^s)(1 - L)A'(L)$$

alakú vagyis van még hagyományos egységyökök is. Mindezeket az eseteket és általánosításukat magában foglalja a SARIMA  $(p, d, q)x(P_s, d_s, Q_s)$  modell család, ahol a stacionaritás eléréséhez az eredeti idősort  $d$ -szer differenciáljuk és  $d_s$ -szer szezonálisan differenciáljuk.

Ha SARIMA modellt illesztünk, akkor a már stacionáriusnak tekintett változóhoz tartozó ACF-ből és PACF-ből következtetnünk kell a szezonális tag foksámára is. Ez hasonló a nem-szezonális esetben megszokotthoz. Az újdonság a szezonális egységyökök tesztje. Ennek az alapproblémája a következő. (Az egyszerűség kedvéért tekintsünk negyedéves szezonalitást.)

Tegyük el, hogy  $(1 - L^4)x_t$  már stacionárius. Ekkor mivel

$$1 - L^4 = (1 - L)(1 + L)(1 + L^2)$$

az  $(1 - L)x_t, (1 + L)x_t, (1 + L^2)x_t$  közül legalább az egyiknek stacionáriusnak kell lennie. Tehát ezt az összetett hipotézist kell tesztelni. Erre szolgál a Hylleberg-Engle-Granger-Yoo (HEGY) teszt.

A gyakorlatban a makro ökonometrikusok gyakran szezonálisan igazított idősorral dolgoznak, amelyet vagy maguk, vagy pedig a statisztikai hivatalokban alkalmazott eljárás hoz létre. A statisztikai hivatalokra azért bízunk magukat, mert ez kényelmes, és megtakarítják az olyan részletekkel való törődést, mint a munkanapok száma, vagy az ünnepek adott éven belüli elhelyezkedése.

A szezonális megíté esetén tehát a fenti statisztikai algoritmusunkon módosítanunk kell.

1. ADF tesztet hajtunk végre. Ha nem fogadjuk el az egységyök nullhipotézisét, akkor a folyamatot stacionáriusnak tekintjük, és megnézzük az ACF-et és PACF-et. Ebből meghatározzuk sejtésünket az AR és MA tagok foksámáról, beleértve a szezonális AR és MA tagokat is. Innentől a szokásos algoritmus (becslések, diagnosztikák, esetleges újrabecslés, előrejelzés) működik.

2. Elfogadjuk az egységyök létét, és az ábrák alapján arra gyanakszunk, hogy van nem-stacionárius szezonális. Ekkor egyik lehetőségünk az, hogy szezonálisan is differenciálunk, és utána haladunk tovább a szokásos úton.

3. De lehet, hogy nem hiszünk a szemünknek, és elvégezzük a HEGY tesztet. Ennek eredménye lehet az, hogy (1) rosszul gyanakodtunk, és tekinthetjük stacionáriusnak a differenciált idősort. (2) További (nem-szezonális) differenciálást hajtunk végre, és ezt kezeljük stacionáriusként. (3) Szezonálisan differenciálunk, és az így kapott idősort kezeljük stacionáriusként. (4) A HEGY teszt egyéb transformációt javasol stacionarizálásra, és evvel folytatjuk a vizsgálatot a szokásos módon.

4. Alternatívaként kezelhetjük a szezonalitást determinisztikusként, és szezonális dummy-kkal hajtunk végre becslést, majd a maradékot ARMA-ként kezeljük. (Hasonló a lineáris trend kiszűréséhez.)

5. A leggyakrabban használt megoldás azonban: igazítsuk az idősort szezonálisan (vagy még inkább: találjunk szezonálisan igazított adatsort), és inentől ne törődjünk a szezonalitással ...

**Frakcionális differenciálás** Bizonyos idősorok esetén az autokovarianciák látványosan nem-exponenciálisan csökkennek a 0-hoz, de látszólag gyorsabban, mint lineárisan. Felmerül a kérdés, hogy kell-e ezeket differenciálni a stacionarizáláshoz.

A differenciálás általánosításaként tekintünk az

$$(1 - L)^d$$

operátort. Legyen

$$(1 - L)^d x_t = \epsilon_t$$

stacionárius. Hogyan értelmezzük a  $(1 - L)^d$  "frakcionális" differenciát? Fejtsük sorba a

$$(1 - L)^d$$

függvényt  $L = 0$  körül

$$\begin{aligned} \Phi(L) &= 1 - dL - \frac{d(d-1)}{2!}L^2 - \frac{d(d-1)(d-2)}{3!}L^3 - \dots \\ &= \sum \phi_j L^j. \end{aligned}$$

Ez egy végtelen késleltetési polinom, az együtthatókra:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1 \\ \phi_j &= \frac{j-1-d}{j} \phi_{j-1}. \end{aligned}$$

Ekkor ha

$$x_t = (1 - L)^{-d} \epsilon_t.$$

és  $\epsilon_t$  egy ARMA(p,q) folyamat, akkor  $x_t$  frakcionálisan integrált  $ARFIMA(p, d, q)$  folyamat..

Ha  $-0.5 < d < 0.5$  akkor  $x_t$  stacionárius, de belátható, hogy nagy  $k$ -ra:

$$\rho(k) \sim k^{2d-1},$$

és

$$\sum abs(\rho(k)) = \infty,$$

vagyis az idősor nem abszolút szummázható, lassan halnak ki az autokovarianciák. A modell paramétereinek becsléséről, és a frakcionális differencia fokának meghatározásáról lásd (Kirchgassner et al. (2011)).

Tehát az algoritmusunk egy újabb módosítása:

Ha az ACF lassan tart 0-hoz, de az egységgyök tesztek nem jeleznek egyértelműen egységgyököt, akkor megpróbálhatunk frakcionálisan differenciált modellt is becsülni, és azzal előrejelzéseket készíteni.

**ARCH (autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitás)** Pénzügyi idősorok tulajdonságai között gyakran meg szokták említeni a következőket: normalitástól való eltérés (pl. túl vastag szélek), volatilitás klaszterek (egyes időszakokban nagyobb az ingadozás, mint másokban), "leverage" hatás (aszimmetria áll fenn a "jó" és "rossz" időszakok között), hosszú memória (a korrelációk hosszú távon fennmaradnak). Ezeket a jellemzőket egy olyan modellosztályban szokták vizsgálni, ahol az ARIMA modellektől való eltérés főként az innováció folyamatra vonatkozó feltevésekben jelentkezik

Tekintsünk olyan ARMA folyamatot, ami konstrukció szerint nem homoszkedasztikus:

$$A(L)z_t = B(L)u_t,$$

$$E(u_t | u_{t-1}, \dots) = 0,$$

de

$$h_t = var(u_t | u_{t-1}, \dots) = \omega_0 + \sum_{i=1}^m \omega_i u_{t-i}^2.$$

Ez a folyamat bizonyos paraméterekre lehet stacionárius. Ilyenkor ARMA(p,q) ARCH (m) folyamatról beszélünk.

Levezethető, hogy  $u_t^2$  egy AR folyamatot követ.

A legegyszerűbb speciális eset, amikor  $m = 1$ . ilyenkor a feltétel nélküli variancia:

$$var(u_t) = \frac{\omega_0}{1 - \omega_1}.$$

Ha  $u_t$  feltételesen normális, akkor

$$E_{t-1}(u_t^4) = 3h_t^2.$$

Levezethető, hogy  $u_t$  eloszlása a széleken vastagabb, mint a normális eloszlás, és ráadásul bizonyos paraméterekre nem is létezik a negyedik feltétel-nélküli momentum.

Az ARCH általánosítása a GARCH modell, amikor  $h_{t-i}$ -től is függ a  $h_t$  variancia

$$h_t = \text{var}(u_t \mid u_{t-1}, \dots) = \omega_0 + \sum \omega_i u_{t-i}^2 + \sum \psi_i h_{t-i}^2.$$

Az általánosítás oka az, hogy gyakran túl sok  $m$ -re van szükség az ARCH-ban ahhoz, hogy visszadják az innovációs folyamat viselkedését. (Lásd az MA és ARMA folyamatok közti különbséget.) Levezethető, hogy itt  $u_t^2$  egy ARMA folyamatot követ.

Léteznek ARCH tesztek, amiket a heteroszkedaszticitás észleléséhez használhatunk. Úgy járhatunk el, hogy becsülünk egy ARMA-t, majd a becsült hibák négyzeteire számolunk Ljung-Box tesztet vagy egy LM tesztet, ahol nullhipotézis a homoszkedaszticitás.

Számos további általánosítás is létezik ezekről lásd Darvas (2004). A becslési technika itt általában a maximum likelihood becslés, ami függ az eloszlásokra tett feltevésektől (nemcsak normális eloszlást használnak a feltételes eloszlásokra sem).

Van tehát egy még egyszer módosított algoritmusunk:

Ha az ARMA becsült reziduumaiban volatilitás ingadozást vélünk felfedezni a reziduumok négyzetére becsülhetünk egy modellt, ami alapján tesztelhetjük a GARCH hatások meglétét. Ha ilyet találunk, akkor a megfelelő modelleket becsülhetjük, és előrejelezhetünk velük.

## 2.4 Gyakorlatok R-ben

1. Idősoros adatok beolvasása: dollár árfolyam idősorok
 

```

neerm <- read.csv2(file="neer_eredeti.csv", header=T, sep=";", row.names=1)
# havi idősorokként deklarálás, a kezdeti dátum: 1991, január
neermts=ts(neerm, frequency=12, start=c(1991,1))
#hivatkozás a magyar árfolyamokra
plot (neermts[, "Hungary"], ylab="Forint árfolyam HUF/USD")
# az összes árfolyam logaritmizálása
lnermts = log(neermts)
# a magyar log-árfolyamok külön elnevezése
lhufd= lnermts[, "Hungary"]
# győződjünk meg arról, hogy idősor-e?
is.ts (lhufd)
# egy egyszerű regresszió: HUF és DEM
fit=lm (lhufd ~log(neermts[,1]))
summary (fit)
# mit látunk?
plot (fit$resid, type="l")

```
2. Differencia-képzés, késleltetés, átlag, autokovariancia függvény
 

```

# Az idősor átlaga
mean (lhufd)
# a becsült autokovariancia függvény
acf (lhufd)
# Mit látunk?
#Milyen opciók vannak? Mi a procedura outputja?
# vegyük a log-árfolyam első differenciáját
dlhufd=diff(lhufd)
# mit jelent dlhufd?
plot(dlhufd)
# átlag és autokovariancia, mit látunk?
mean (dlhufd)
acf(dlhufd)
# a differencia differenciáját számoljuk ki kétféleképpen
ddlhufd=diff(lhufd,differences=2)
ddlhufd2=diff(dlhufd)
#tényleg ugyanazt kapjuk?
plot(ddlhufd,ddlhufd2)
# milyen opciója van még a diff-nek?
# diff(x,m,n)= 1. lépés új idősor: y(t)= x(t)-x(t-m),
# 2. lépés z1(t)= y(t)-y(t-1), z2(t)=z1(t)-z2(t-1), ... zn(t)=z(n-1)(t)-z(n-
1)(t-1)
#(1-L(adm))(1-L)(adn)
#használjuk a lag utasítást
lhufd1=lag(lhufd,1)

```

```

# mi történik?
lhufd1=lag(lhufd,-1)
# mi történik?

3.    Filterek, MA és AR generálás
# fehér zaj szimuláció
w = rnorm(1000)
w =ts(w)
par(mfrow=c(2,1))
plot (w, main="Fehér zaj")
acf (w, main="Fehér zaj acf")
# véletlen bolyongás generálás
x = cumsum(w)
par(mfrow=c(2,1))
plot (x, main= "Véletlen bolyongás")
acf (x, main="Véletlen bolyongás, acf")
#közelebbbről
x1=x[1:100]
plot.ts (x1)
# egy MA(1) folyamat generálása
v = filter(w, sides=1, filter=c(1,0.8))
is.ts (v)
par(mfrow=c(2,1))
par(mfrow=c(2,1))
plot (v, main= "MA(1)")
acf (v,na.action=na.pass, main= "MA(1), acf")
#a filter utasítás opciói
# hasonlítsa össze x1=w+0.8*lag(w,-1)-t, x2=filter(w, sides=1, filter=c(1,0.8))-
t és
#generáljon szimmetrikus MA filtert (1/3, 1/3,1/3) (x4) és rajzolja ki együtt
a w-vel !
x4= filter(w, sides=2, filter=c(1/3,1/3,1/3))
# Hasonlítsuk össze w-t és x4-et!
par(mfrow=c(2,1))
plot.ts (w)
plot.ts (x4)
# generáljunk AR (2)-t
w = rnorm(550,0,1)
w=ts(w)
y = filter(w, filter=c(.98,0.2), method="recursive")
y = filter(w, filter=c(.98,0.2), method="recursive")[-(1:50)]
# Mi a különbség a fenti két megoldás között?
is.ts (y)
plot.ts(y, main="autoregression")
acf (y)
polyroot (c(1, -0.98,-0.2))

```

```

# Stacionárius a folyamat?
# Egy másik AR (2)
w = rnorm(550,0,1)
w=ts(w)
y1 = filter(w, filter=c(0.5,0.2), method="recursive")[-(1:50)]
par(mfrow=c(2,1))
plot.ts(y1, main="AR (2), stacionárius")
acf(y1, main="AR (2), stacionárius, acf")
polyroot(c(1,-0.5,-0.2))
# Mi különbözteti meg y-t és y1-et?
4. ARMA modell identifikáció
# Két package-re lesz szükség
library (tseries)
library (astsa)
# Vizuális stacionaritási teszt
acf (lhufd)
# Próbáljunk stacionarizálni!
dlhufd=diff(lhufd)
acf (dlhufd)
acf (lhufd, type="partial")
# Egyszerre tekintsük a kétfajta autokorrelációt
acf2 (dlhufd)
# Milyen ARMA modellt sejtethetünk? ma=1, ar=1 arma=1,1?

5. ARMA becslések
# Ha csak AR-t akarunk becsülni
ar (dlhufd, method="yule-walker", order.max=1)
# Kétfajta ARMA becslés
# ML becslés
(mod1=arima (lhufd, order=c(1,1,1)))
# Hogyan számíthatnánk t-statisztikát?
# Van-e értelme konstansnak a becslésben?
mean (dlhufd)
plot (lhufd)
# Próbáljunk meg konstans is becsülni!
arima (lhufd, order=c(1,1,1), include.mean=T)
# Sikertült? Új kísérlet:
arima (dlhufd, order=c(1,0,1), include.mean=T)
# Van lényeges változás? Az „intercept” a konstans vagy a várható érték?
dmdlhufd=dlhufd-mean(dlhufd)
arima (dmdlhufd, order=c(1,0,1), include.mean=T)
# Mennyi az ARMA (1,1) becsült várható értéke és mekkora a konstans a
becsült egyenletben?
# 2. becslés: feltételes legkisebb-négyzetek becslés
arima (dlhufd, order=c(1,1), include.intercept=F)
# Ha include.intercept=T, akkor mit tapasztalunk?

```



```
# Az ML becslés felhasználóbarát formában
(mod=sarima (lhufd, 1,1,1, no.constant=T, details=F))
# A 2. modell ML becslése
(mod2=arima (lhufd, order=c(1,1,0)))
# A 3. modell ML becslése
(mod3=arima (lhufd, order=c(0,1,1)))
```

#### 6. Diagnosztikák és modell választás

```
# Standardizált reziduumok
stres1=mod1$resid/sqrt(mod1$sigma2)
plot (stres1)
# A reziduumok autokorrelációi 0-k?
acf (mod1$resid)
Box.test (mod1$resid, type= "Ljung-Box", lag=12)
# Normálisak a reziduumok?
qqnorm (mod1$resid)
jarque.bera.test (mod1$resid)
# modellek közti választás
AIC(mod1,mod2,mod3)
BIC(mod1,mod2,mod3)
```

#### 7. A differenciálás rendjének meghatározása

```
# Mi történik, ha még egyszer differenciálunk?
ddlhufd=diff(dlhufd)
acf2 (ddlhufd)
# Egységgyök tesztek
adf.test (lhufd)
adf.test (dlhufd)
```

#### 8. Szezonalitás

```
#Születések adatsor
library (astsa)
dsbirth= diff(birth, 12)
dbirth=diff(birth)
ddsbirth=diff(dsbirth)
plot.ts(cbind(birth,dbirth,dsbirth,ddsbirth), yax.flip=TRUE, main="")
acf2 (birth)
acf2 (dbirth)
acf2 (dsbirth)
acf2 (ddsbirth)
library (tseries)
adf.test (birth)
adf.test (dbirth)
adf.test (dsbirth)
adftest (ddsbirth)
# A dbirth vagy ddsbirth tűnik stacionáriusnak
```

```

#SARIMA becslések
(fitdds=sarima(birth,1,1,1,1,1,12, details=F))
(fitd=sarima(birth,1,1,0,1,0,1,12, details=F))
# A dds modell jobbnak tűnik, és a becslési eredményből is látszik, hogy
kell a szezonális differenciálás
# Próbáljunk meg egyszerűsíteni
(fitddsa=sarima(birth,1,1,1,0,1,1,12, details=F))
# Tényleg ugyanazt adja?
(fitddsa=arima(birth, order=c(1,1,1), seasonal=list(order=c(0,1,1), period=12)))
#Előrejelzés
sarima.for(birth, 12,1,1,1, 0,1,1,12)

# Determinisztikus szezonálítás
require (forecast)
#Szezonális dummy-k definiálása
dummies=seasonaldummy(birth)
dummies=ts(dummies,start=c(1995,1),frequency=4)
(fitb=lm(birth~dummies))
plot.ts(fitb$residuals)
res=ts(fitb$residuals,start=c(1995,1),frequency=4)
acf (fitb$residuals)
# Szezonális igazítás
require (seasonal)
(birthsa=seas(birth))
plot.ts (final(birthsa)-original(birthsa))
par(mfrow=c(2,1))
plot (final(birthsa))
plot (original(birthsa))

# Szezonális elemzés szezonálisan nem igazított CPI-re
cpinsa <- read.csv2(file="cpi_nsa.csv", header=T, sep=";", row.names=1)
cpinsa=ts(cpinsa, frequency=12, start=c(1991,1))
cpinsahu= cpinsa[, "Hungary"]
plevnsahu=cumprod(cpinsahu+1)
# Árszint képzés
plevnsahu=ts(plevnsahu, frequency=12, start=c(1991,1))
acf2(diff(plevnsahu))
acf2(diff(plevnsahu,12))
#Sejtések
(fitplevnsa1= sarima (plevnsahu,1,1,0,0,1,0,12))
(fitplevnsa2= sarima (plevnsahu,1,1,0,1,0,0,12))
# A második változat jobbnak tűnik, azaz nem kell szezonálisan differen-
ciálni
sarima.for(plevnsahu,12, 1,1,0,1,0,0,12)
#Szezonális igazítás
plev.sa=seas(plevnsahu)

```

```
# Összevetés a szezonálisan igazított adatsorral
cpisa <- read.csv2(file="cpi_sa.csv", header=T, sep=";", row.names=1)
cpi=ts(cpisa, frequency=12, start=c(1991,1))
cpihu= cpi[, "Hungary"]
plevhu=cumprod(cpihu+1)
plevhu=cumprod(cpihu+1)
plevhu=ts(plevhu, frequency=12, start=c(1991,1))
par(mfrow=c(3,1))
plot (final(plev.sa))
plot (plevhu)
diff= final(plev.sa)-plevhu
plot (diff)
# Figyelem: elég nagy a különbség
```

#### 9. Hosszú-memória

```
require astsa
u = acf(log(varve), 100, plot=FALSE)
plot(u[1:100], ylim=c(-.1,1), main="log(varve)")
require(fracdiff)
lvarve = log(varve)-mean(log(varve))
lvarve.fd = fracdiff(lvarve, nar=0, nma=0, M=30)
# A becsült  $d$ 
lvarve.fd$d
```

#### 10. Autoregresszív heteroszkedaszticitás

```
# A szezonálisan igazított árakkal dolgozunk
require (seasonal)
plev=seas(plevnsahu)
# Pontosabban az ebből képzett inflációval
cpir=diff(log(final(plev)))
# Nézzük meg, hogy kell-e GARCH vizuálisan
u = arima(cpir, order=c(1, 0, 0))
acf2(u$residuals)
acf2(u$residuals*u$residuals)
# Vagy inkább egy formális teszttel
require (astsa)
arch.test (u)
# Becsüljük GARCH modelleket
require (fGarch)
# Egy ARMA (1,0) ARCH (1) modellt becslünk
summary(fit=garchFit(~arma(1,0)+garch(1,0), cpir))
predict(fit,n.ahead=12)
# Ez egy igazi GARCH: ARMA (1,0) GARCH(1,1)
summary(fitg <- garchFit(~arma(1,0)+garch(1,1), cpir))
plot(fitg)
# Végül egy APARCH: ARMA (1,0) APARCH(2,2) ferde Student-hibákkal
```

```
summary(fitap <- garchFit(~ arma(1,0)+aparch(2,2), cpir, cond.dist='sstd'))
```

### 3 Többváltozós idősorelemzés az időtartományban

#### 3.1 Együttes stacionaritás

Tegyük fel, hogy  $x_t$  és  $y_t$  stacionárius és a kereszt-autokorrelációs függvény is csak az előjeles távolságtól függ.

A kereszt autokorrelációk írhatók tehát

$$cov_{xy}(h) = E((x_{t-h} - E(x))(y_t - E(y))), h = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$$

alakban.

Példa:

$$y_t = ax_{t-1} + u_t,$$

ahol  $x_t$  és  $u_t$  független fehér zaj  $\sigma_x^2$  és  $\sigma_u^2$  varianciákkal. Ekkor

$$\begin{aligned} cov_y(0) &= a^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2 \\ cov_{xy}(0) &= 0 \\ cov_{xy}(1) &= a^2\sigma_x^2 \\ cov_{xy}(-1) &= 0 \\ cov_{yx}(1) &= 0 \\ cov_{yx}(1) &= a^2\sigma_x^2. \end{aligned}$$

A példa illusztrálja, hogy

$$\begin{aligned} cov_{xy}(h) &= cov_{yx}(-h) \\ cov_{xy}(h) &\neq cov_{xy}(-h). \end{aligned}$$

Viszont két változó stacionaritásából nem következik az együttes stacionaritás, amit az alábbi példa is igazol:

$$\begin{aligned} x_t &= \epsilon_1 \\ y_t &= \epsilon_t, \end{aligned}$$

ahol  $\epsilon_t$  fehér zaj. Itt:

$$\begin{aligned} cor(x_1, y_2) &= 1 \\ cor(x_2, y_3) &= 0. \end{aligned}$$

### 3.2 Stacionárius VAR (vektor autoregresszió) reprezentáció

A többváltozós idősorelemzés talán legnépszerűbb modellje a VAR (vektor autoregresszió).

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{t-1} + \dots + \mathbf{A}_p \mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{u}_t$$

Itt  $\mathbf{x}_t$   $n \times 1$ -es,  $\epsilon_t$  vektor fehér zaj  $\Omega$  pozitív definit egyidejű kovariancia mátrixszal.

Ennek késleltetési polinom alakja:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 L - \dots - \mathbf{A}_p L^p) \mathbf{x}_t = \mathbf{A}(L) \mathbf{x}_t = \mathbf{u}_t.$$

A  $p$ -késleltetésű VAR felírható mindig elsőrendű VAR-ként (lásd Függelék):

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_{t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{t-p+1} \end{bmatrix}, \epsilon'_t = \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdot & \cdot & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{I}_{n \times n} & 0_{n \times n} & & & \\ & \mathbf{I}_{n \times n} & 0_{n \times n} & & \\ & & & \cdot & \\ & & & \mathbf{I}_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} + \epsilon'_t.$$

A stacionaritás feltétele két, egymással ekvivalens, formában is megfogalmazható:

$$1. \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdot & \cdot & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{I}_{n \times n} & 0 & & & \\ & \mathbf{I}_{n \times n} & 0 & & \\ & & & \cdot & \\ & & & \mathbf{I}_{n \times n} & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeinek abszolút értéke kisebbek, mint 1.

vagy

2. a

$$\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 L - \dots - \mathbf{A}_p L^p) = 0$$

minden gyöke abszolút értékben nagyobb, mint 1.

A VAR-nak létezik VARMA általánosítása:

$$\mathbf{A}(L) \mathbf{x}_t = \mathbf{B}(L) \mathbf{u}_t,$$

amit azonban csak ritkán használnak. Ennek magyarázata az, hogy az egyváltozós esetben a parciális autokorrelációs függvényeket gyakran nem lehet visszaadni MA tagok és/vagy nagy késleltetésszám nélkül, ám a többváltozós esetben a több sokk mintegy gondoskodik erről.

### 3.3 Becslés és identifikáció

A VAR modell egyenletenként OLS-sel való becslése konzisztens és aszimptotikusan hatásos, de kismintában torzított. A gyakorlatban az identifikáció szinte csak két lépésből áll:

1. Annak meghatározása, hogy az egyes változók stacionáriusak.
2. A késleltetés szám ( $p$ ) meghatározása.

Az előbbire leggyakrabban a szokásos egységgyök tesztek alkalmazását, míg az utóbbiakat vagy valamilyen információs kritériummal vagy szekvenciális likelihood arány tesztekkel határozzák meg. (Az LR teszt aszimptotikusan khinégyszet annyi szabadságfokkal ahány restriktió van, vagyis, ha egy pótlólagos késleltetést tesztlünk, akkor a szabadságfok megegyezik a változók száma négyszetével).

### 3.4 Impulzusválasz függvény

A  $VAR(p)$  végtelen MA alakja:

$$\mathbf{x}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 L - \dots - \mathbf{A}_p L^p)^{-1} \mathbf{u}_t$$

Itt az  $(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 L - \dots - \mathbf{A}_p L^p)^{-1}$  egy végtelen polinom mátrix,

$$\mathbf{I} + \Pi_1 L + \Pi_2 L^2 + \dots + \Pi_k L^k + \dots$$

alakú. Az egyes elemek jelentése:  $\Pi_k^{(ij)} = \frac{\partial x_t^{(i)}}{\partial u_{t-k}^{(j)}}$ , mivel

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{u}_t + \Pi_1 \mathbf{u}_{t-1} + \Pi_2 \mathbf{u}_{t-2} + \dots + \Pi_k \mathbf{u}_{t-k} + \dots$$

Amennyiben  $p = 1$ , az

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{u}_t + \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_{t-1} + \dots + \mathbf{A}_1^k \mathbf{u}_{t-k} + \dots$$

alakra egyszerűsödik a formula.

Meghatározhatjuk a hosszú távú hatások mátrixát:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \dots - \mathbf{A}_p)^{-1} = \Pi,$$

ami a polinom mátrix értéke az  $L = 1$  helyen. Ennek jelentése: ha az  $u$  konstans lenne akkor  $x$  is, és a kettejük közti relációt a

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \dots - \mathbf{A}_p)x = u,$$

egyenlet írná le, amiből

$$x = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \dots - \mathbf{A}_p)^{-1} u = \Pi u.$$

A VAR sokkok hosszú távú kovariancia mátrixa:

$$E(\Pi' \Pi') = \Pi \Omega \Pi',$$

amely elemeinek jelentése:  $\lim \Pi^{(ij)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial x_t^{(i)}}{\partial \epsilon_{t-k}^{(j)}}$ , vagyis  $\Pi^{(ij)}$  a j-edik sokk egységnyi végtelen ideig fenntartott hatását méri az i-edik változóra. A p=1 esetben a formula:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_1^k = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1}.$$

Van azonban egy interpretációs probléma: mivel  $\mathbf{\Omega}$  nem diagonális az  $u$  különböző komponensei nem változnak egymástól függetlenül, tehát a fent megadott interpretáció csak akkor elfogadható, ha értelmesen beszélhetünk arról, hogy az egyes sokkok hatása független a többiek alakulásától. A "megoldás" az, ha áttérünk az  $u$  vektorról egy diagonális kovariancia mátrixú  $\epsilon$  vektorra.

Általában igaz, hogy ha

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}\epsilon$$

akkor

$$\text{cov}(\epsilon) = \mathbf{\Omega}_\epsilon = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{\Omega}(\mathbf{Q}^{-1})'.$$

Ha csak annyit kötünk ki, hogy  $\mathbf{\Omega}_\epsilon$  legyen diagonális, akkor az eredeti VAR sokkoknak (az  $\mathbf{u}$  vektor) végtelenül sok olyan  $\mathbf{Q}^{-1}$ transzformációval definiált lineáris transzformációja létezik, hogy az  $\epsilon$  sokkok korrelálatlanok. A módosult impulzusválasz függvény:

$$\mathbf{x}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_1\mathbf{L} - \dots\mathbf{A}_p\mathbf{L}^p)^{-1}\mathbf{Q}\epsilon_t$$

Például amennyiben  $p = 1$ :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{Q}\epsilon_t + \mathbf{A}_1\mathbf{Q}\epsilon_{t-1} + \dots + \mathbf{A}_1^k\mathbf{Q}\epsilon_{t-k} + \dots$$

Egy lehetséges egyértelmű megoldás, ha feltesszük, hogy  $\mathbf{Q}$  alsó háromszög mátrix pozitív diagonális elemekkel (Cholesky-dekompozíció).

Ilyenkor sorbarendezzük az  $\mathbf{x}$  vektor elemeit, amivel azt tételezzük fel, hogy  $\epsilon_1$  hat az összes  $u$ -ra,  $\epsilon_2$  csak  $u_2$ -re és a magasabb indexűekre, és így tovább.

Példa:

$$\text{Legyen } \mathbf{\Omega}_u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}. \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ q_{12} & q_2 \end{bmatrix}. \mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} q_1 & q_{12} \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} q_1^2 &= a_{11} \\ q_{12}q_1 &= a_{12} \\ q_{12}^2 + q_2^2 &= a_{22}. \end{aligned}$$

Ha kiegészítenénk még egy sorral és oszloppal az eddigi számítások továbbra is érvényesek maradnának.



**Variancia-dekompozíció** Mivel

$$x_{t+s} = \mathbf{u}_{t+s} + \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{u}_{t+s-1} + \dots + \mathbf{\Pi}_{s-1} \mathbf{u}_{t+1} + \mathbf{\Pi}_s \mathbf{u}_t + \mathbf{\Pi}_{s+1} \mathbf{u}_{t-1} \dots$$

a (végtelen) lineáris predikció  $t$ -ben  $t+s$ -re:

$$\widetilde{x_{t+s,t}} = \mathbf{\Pi}_s \mathbf{u}_t + \mathbf{\Pi}_{s+1} \mathbf{u}_{t-1} + \dots$$

Ekkor a predikciós hiba:

$$x_{t+s} - \widetilde{x_{t+s,t}} = \mathbf{u}_{t+s} + \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{u}_{t+s-1} + \dots + \mathbf{\Pi}_{s-1} \mathbf{u}_{t+1}.$$

vagy

$$x_{t+s} - \widetilde{x_{t+s,t}} = \mathbf{Q} \epsilon_{t+s} + \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{Q} \epsilon_{t+s-1} + \dots + \mathbf{\Pi}_{s-1} \mathbf{Q} \epsilon_{t+1}.$$

A predikciós hiba (vektor) kovariancia mátrixa:

$$MSE = E((\mathbf{x}_{t+s} - \widetilde{x_{t+s,t}})(\mathbf{x}_{t+s} - \widetilde{x_{t+s,t}})') = \mathbf{\Omega} + \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{\Omega} \mathbf{\Pi}_1' + \dots + \mathbf{\Pi}_{s-1} \mathbf{\Omega} \mathbf{\Pi}_{s-1}'.$$

Az MSE (mean-squared-error) vektor a  $E((\mathbf{x}_{t+s} - \widetilde{x_{t+s,t}})(\mathbf{x}_{t+s} - \widetilde{x_{t+s,t}})')$  mátrix diagonálisa. A fenti rekurzivitási feltevés mellett a  $j$ -edik változó MSE-je felbontható az  $i$ -edik sokknak betudható részek összegére.

$$MSE_j = \sum \sigma_{\epsilon_i}^2 (q_i q_i' + \mathbf{\Pi}_1 q_i q_i' \mathbf{\Pi}_1' + \dots + \mathbf{\Pi}_{s-1} q_i q_i' \mathbf{\Pi}_{s-1}').$$

### 3.4.1 Exogenitás és Granger okság

Tegyük fel, hogy a következő modell érvényes:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B} \mathbf{y}_t + \mathbf{u}_t.$$

Itt  $\mathbf{y}_t$  egy  $K$  dimenziós vektor, ami tartalmazhat determinisztikus tagokat (pl. lineáris trend, konstans) is. Az  $\mathbf{y}$  vektor elemeit exogénnek tekintjük, és  $\mathbf{x}_t$  feltételes várható értékét  $\mathbf{y}_t$  feltétellel írjuk le. A modell általánosabb alakja

$$\mathbf{A}(\mathbf{L}) \mathbf{x}_t + \mathbf{B}(\mathbf{L}) \mathbf{y}_t = \mathbf{u}_t.$$

Mikor tekinthetünk egy  $\mathbf{y}_t$  vektort exogénnek, és mit is jelent az exogenitás?

**Granger-okság, gyenge és erős exogenitás** Azt mondjuk, hogy amennyiben az  $\mathbf{x}$  változó figyelembe vétele nem javít szignifikánsan  $\mathbf{y}$  előrejelzésén, akkor  $\mathbf{x}$  nem Granger-oka  $\mathbf{y}$ -nak.

Gyenge exogenitásról akkor beszélünk, ha a  $\mathbf{B}(\mathbf{L})$  paramétereket az  $\mathbf{y}_t$  marginális folyamata paraméterei nélkül is meg tudjuk becsülni konzisztensen.

Erős exogenitásról pedig akkor, ha az  $\mathbf{y}$  gyengén exogén, és  $\mathbf{x}$  nem-Granger oka  $\mathbf{y}$ -nak.

Az " $x$ , ha  $y$ " összefüggésre vagyunk kíváncsiak. Megbecsülhetjük-e konzisztens módon, anélkül, hogy ismernénk az  $y$  folyamat tulajdonságait? Ha igen, akkor  $y$  gyengén exogén.

Ha előre akarjuk jelezni  $y$ -t, akkor kellenek-e hozzá  $x$  múltbeli értékei? Ha nem, akkor  $x$  nem Granger oka  $y$ -nak, és az " $x$ , ha  $y$ " feltételes előrejelzés elvégezhető. Ha például egy VAR restriktciók nélkül érvényes  $x$ -re és  $y$ -ra, akkor  $x$  Granger oka  $y$ -nak és  $y$  nem erősen exogén. Ilyenkor a feltételes modell nem alkalmas hatékony előrejelzésre.

### 3.4.2 A (stacionárius) VAR elemzés algoritmusa

1. Egységgyök tesztekkel eljutunk egy olyan vektorhoz, amelynek minden elemét stacionáriusnak tekintjük.
2. Meghatározzuk a VAR késleltetés számát információs kritériumok és/vagy LR tesztek segítségével.
3. Megbecsüljük a paramétereket OLS-sel vagy maximum likelihood módszerrel.
4. Diagnosztikus tesztekkel ellenőrizzük a modell jóságát (pl. ARCH LM teszt, normalitási tesztek, és Box-Cox teszt).
5. Előrejelzést számolunk a becsült és kielégítőnek elfogadott modellel.
6. A változók sorbarendezeése után kiszámoljuk az impulzus válaszokat és a variancia dekompozíciót.

SVAR (strukturális vektor autoregresszió)

Közgazdasági megfontolások alapján azt gondoljuk, hogy nemcsak ortogonális (strukturális) sokkok mozgatják a makrofolyamatokat, hanem a különböző makroökonómiai változók egy időszakon belül is összefüggésben vannak. Ezt a gondolatot az alábbi SVAR modell fejezi ki matematikailag:

$$\mathbf{Ax}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_{t-2} + \dots + \mathbf{A}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{B}\epsilon_t,$$

ahol  $\epsilon_t$  fehér zaj  $I$  egyidejű kovariancia mátrixszal. Ebben a rendszerben az összes paraméter száma:  $(p+2)n^2$ .

Ennek a rendszernek a redukált formája:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{x}_{t-2} + \dots + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\epsilon_t.$$

A redukált forma nyilván a

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{C}_2\mathbf{x}_{t-2} + \dots + \mathbf{C}_p\mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{u}_t$$

alakban írható, vagyis megfelel egy az előző alfejezetben vizsgált VAR-nak. A redukált formában a paraméterek száma:  $pn^2 + n(n+1)/2$ . Ugyanis a  $p$  késleltetéshez tartozó  $\mathbf{C}_s$  mátrixok mellett ott van még a  $\Omega_u$  kovariancia mátrix is,  $n(n+1)/2$  paraméterrel. A strukturális paraméterek túl sokan vannak, de ha megfelelő mennyiségű feltevést teszünk, akkor identifikálhatóak, vagyis egyértelmű megfeleltetés van a redukált forma és a strukturális forma paraméterei között. Egyszerű számolással belátható, hogy a megkötések száma  $n^2 + n(n-1)/2$  kell legyen, mivel

$$n^2 + n(n-1)/2 + pn^2 + n(n+1)/2 = (p+2)n^2.$$

Tehát elképzelhető az, hogy ennyi paraméter megkötése után a következő eljárást követjük. A redukált formát egyenletenként OLS-sel becsüljük, majd a  $\Omega_u$  mátrixot az OLS reziduumból a

$$\widehat{\Omega}_u = \frac{1}{T} \sum \widehat{\mathbf{u}}_t \widehat{\mathbf{u}}_t'$$

formulával, ahol

$$\widehat{\mathbf{u}}_t = x_t - (\widehat{\mathbf{C}}_1\mathbf{x}_{t-1} + \widehat{\mathbf{C}}_2\mathbf{x}_{t-2} + \dots + \widehat{\mathbf{C}}_p\mathbf{x}_{t-p}),$$

és  $\widehat{\mathbf{C}}_i$ -k a becsült redukált forma együttható mátrixok. Ezután megoldjuk a következő egyenleteket:

$$\widehat{\mathbf{A}}^{-1}\widehat{\mathbf{A}}_i = \widehat{\mathbf{C}}_i$$

minden  $i$ -re, és

$$\widehat{\Omega}_u = (\widehat{\mathbf{A}}^{-1}\widehat{\mathbf{B}})(\widehat{\mathbf{A}}^{-1}\widehat{\mathbf{B}})'$$

Ha túl sok restriktíót teszünk, akkor a modell túlidentifikált, ez a módszer nem alkalmazható. Ilyenkor a restriktciókat korlátnak kezelő maximum likelihood becslést kell alkalmazni.

**Példa: az előző alfejezet modellje is SVAR-ként fogható fel** Legyen egy kétváltozós rendszerünk. Egy lehetséges strukturális VAR

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_{t-2} + \dots + \mathbf{A}_p \mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{B} \boldsymbol{\epsilon}_t,$$

ahol  $A = I$  és  $B$  trianguláris. Ilyenkor a restriktciók:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Vagyis csak  $b_{11}, b_{21}, b_{22}$  választható meg szabadon az  $A$  és  $B$  mátrix nyolc paraméteréből.

Azonban nemcsak trianguláris  $B$ -t tételezhetünk fel. Mivel az  $\Omega_u$  (ahol  $u = B\boldsymbol{\epsilon}_t$ ) mátrix  $n^2$  eleméből csak  $n(n+1)/2$  független van, ezért  $n(n-1)/2$  restriktció kell a  $B$  mátrix elemeire, ahhoz hogy  $\Omega$ -ból egyértelműen megkapjuk  $B$ -t. Tehát például az alábbi feltevés mellett is identifikálható modellt kapnánk:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{bmatrix}$$

Például egy elsőrendű SVAR-ban az összes paraméter:  $3n^2$ . A redukált formában viszont csak  $n^2 + n(n+1)/2$  paraméter van. Tehát az éppen-identifikáltságoz  $n^2 + n(n-1)/2$  restriktcióra van szükség.

Egy másik lehetséges feltevés:  $B = I$ . Ekkor

$$\Sigma_u = A^{-1}(A^{-1})',$$

és  $n(n-1)/2$  restriktció kell az  $A$  elemeire.

Lehet kombinálni is a két fajta restriktciót, a lényeg, hogy összesen  $n(n+1)/2$  szabad paraméterünk legyen, vagyis a restriktciók száma  $2n^2 - n(n+1)/2 = \frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2}$ .

**Példa:** Legyenek a restriktciók:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{12} & 1 \end{bmatrix}$$

és

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Egy másik lehetséges típusa a strukturális VAR-nak, amikor egyes sokkok hosszú távú hatásairól teszünk feltevéseket (Blanchard-Quah identifikáció). Itt

feltesszük, hogy  $A = I$ , azaz csak  $n(n-1)/2$  restrikciónak van szükség. A modell MA alakja:

$$\begin{aligned} x_t &= (I - C(L))^{-1} B \epsilon_t \\ &= \Pi_0 \epsilon_t + \Pi_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \Pi_k \epsilon_{t-k} + \dots \end{aligned}$$

Ekkor a

$$\Pi = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i$$

mátrix tartalmazza a hosszú távú kumulált impulzus válaszokat. A Blanchard-Quah-féle identifikációs feltevés a  $\Pi$  mátrixra vonatkozik, általában ezt felső (vagy alsó) háromszög mátrixnak feltételezzük.

Az úgynevezett hosszú távú kovariancia mátrix:  $\Pi \Pi'$ . Ez becsülhető, mint

$$\widehat{\Pi \Pi'} = (\mathbf{I} - \sum \widehat{C}_i)^{-1} \widehat{\Omega} (\mathbf{I} - \sum \widehat{C}_i)^{-1'}$$

Az így kapott mátrix Cholesky-felbontásából kapjuk meg  $\widehat{\Pi}$  becslését. Ebből, mivel

$$\Omega = B B',$$

következik, hogy  $B$  becslése:

$$\widehat{B} = ((\mathbf{I} - \sum \widehat{C}_i) \widehat{\Pi}).$$

**A SVAR elemzés algoritmus** 1. Eljutunk egy elfogadható VAR modellig.

2. Feltevéseket teszünk a rövid vagy hosszú-távú mátrixokra. Ha feltevéseink túlidentifikációhoz vezetnek, akkor azt teszteljük. A SVAR-t becsüljük a restrikciónak figyelembe vételével.

3. A becsült SVAR-ral impulzus válasz függvényt, variancia dekompozíciót, előrejelzést készítünk.

### 3.5 Kointegráció

**Definíció:** Egy  $\mathbf{x}_i$  idősor vektort kointegráltnak nevezünk, ha minden  $x_{it}$   $I(1)$  (azaz elsőrendben integrált) változó, és létezik legalább egy olyan  $\alpha$  vektor, hogy az  $y_t = \alpha' \mathbf{x}_t$  valószínűségi változó stacionárius.

#### 3.5.1 Az Engle-Granger módszer

Feltesszük, hogy csak egy kointegrációs összefüggés van a változók között. Ezt egy kointegrációs teszttel ellenőrizzük, amihez becsljük a

$$x_{1t} = \beta \mathbf{x}_{-1t} + \epsilon_t$$

regressziót, ahol  $\mathbf{x}_{-1}$  a  $x_1$  kivételével az összes változó. Ezután a regresszió reziduumaire egységgyök tesztet végzünk. Ha a nullhipotézist elvetjük, akkor úgy tekintjük, hogy a kointegrációs reláció létezik. Belátható, hogy az OLS becslésből adódó paraméterek (szuper) konzisztens becslését adják az első változóra normalizált kointegrációs kapcsolatnak.

**Hibakorrekciós interpretáció** Ha

$$\psi_t = x_{1t} - \beta \mathbf{x}_{-1t} = 0,$$

akkor a rendszer egyensúlyban van. Ha  $\epsilon_t > (<)0$  akkor az egyensúlytól pozitív (negatív) irányban tér el a rendszer. Azt várjuk, hogy  $\psi_t$  együtthatója negatív, vagyis hibakorrekció történik, az egyensúly irányába való elmozdulás.

**Az Engle-Granger kointegrációs elemzés algoritmus** 1. Eljutunk egy  $I(1)$  változókat tartalmazó modellig.

2. Becslünk egy

$$y_t = \alpha + \beta \mathbf{x}_t + \epsilon_t$$

OLS regressziót.

3. Teszteljük, hogy van-e egységgyök a becsült reziduumokban.

4. Ha nincs, akkor a

$$\nabla y_t = \delta \nabla \mathbf{x}_t - \gamma(y_{t-1} - \alpha - \beta \mathbf{x}_{t-1}) + \eta_t$$

hibakorrekciós modell becslését hajrjuk végre OLS-sel.

Ha *a priori* sejtésünk van a kointegrációs relációról, akkor a 2. pont kimarad, és a 3. pontban a szokásos egységgyök tesztek alkalmazunk. Például, ha azt hisszük, hogy a fogyasztás/jövedelem arány stacionárius, akkor ez azt jelenti, hogy

$$\log C_t - \log Y_t = I(0),$$

vagyis  $\log C_t$  és  $\log Y_t$  kointegráltak és a kointegrációs vektor:  $[1, -1]$ . Ilyenkor a  $\log C_t - \log Y_t$  változóra végzünk egységgyök tesztet.

### 3.6 Az $\mathbf{x}_t$ vektor minden eleme $I(1)$ eset és kointegráció

A fenti eljárás némiképpen speciális. Általában egy változó vektor elemei között nemcsak egy kointegrációs kapcsolat létezhet. Az alábbi elemzés orvosolja ezt a problémát.

Legyen

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_{t-2} + \dots + \mathbf{A}_p \mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{u}_t,$$

mint az előző részben, csak  $\mathbf{x}_t$  elemei most  $I(1)$  változók, és  $\text{cov}(\mathbf{u}_t) = \Omega$ .

Megfigyelés: ha  $\mathbf{A}$  nemszinguláris, akkor az  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  transzformált nem alkothat  $I(0)$  vektort. (Egyébként  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x}$  stacionárius lenne, az  $I(1)$  feltevessel ellentétben.) Viszont elképzelhető, hogy létezik  $n$ -nél kevesebb számú lineáris kombinációja  $x$ -nek, ami stacionárius. Például:

$$\begin{aligned} x_{1t} &= x_{1,t-1} + \epsilon_t \\ x_{2t} &= \alpha_2 x_{1,t} + u_t \\ x_{3t} &= \alpha_3 x_{1,t} + v_t. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} z_{2t} &= x_{2t} - \alpha_2 x_{1,t}, \\ z_{3t} &= x_{3t} - \alpha_3 x_{1,t} \end{aligned}$$

stacionárius változók.

De például

$$z_{23t} = \frac{1}{\alpha_2} x_{2t} - \frac{1}{\alpha_3} x_{3t} = \frac{1}{\alpha_2} z_{2t} - \frac{1}{\alpha_3} z_{3t}$$

is stacionárius változók. Nyilvánvalóan végtelenül sok stacionárius lineáris kombináció létezik.

A VAR átírható ekvivalens módon, mint:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{x}_t &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I}) \mathbf{x}_{t-1} - (\mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p) \nabla \mathbf{x}_{t-1} + \\ &\quad - (\mathbf{A}_3 + \dots + \mathbf{A}_p) \nabla \mathbf{x}_{t-2} - \dots - \mathbf{A}_p \nabla \mathbf{x}_{t-p+1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

("átmeneti" forma, mivel a  $\nabla \mathbf{x}_{t-1}$  mátrixok együtthatói átmeneti hatásokat tartalmaznak)

vagy

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{x}_t &= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I}) \mathbf{x}_{t-p} + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}) \nabla \mathbf{x}_{t-1} + \dots \\ &\quad + (\mathbf{A}_1 + \dots + \mathbf{A}_{p-1} - \mathbf{I}) \nabla \mathbf{x}_{t-p+1} + \mathbf{u}_t. \end{aligned}$$

("hosszú-távú" forma, mivel a  $\nabla \mathbf{x}_{t-1}$  mátrixok együttthatói hosszú távú hatásokat tartalmaznak) alakban.

Mivel feltevés szerint  $\nabla \mathbf{x}_t$  stacionárius ezért  $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I})\mathbf{x}_{t-1}$  és  $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I})\mathbf{x}_{t-p}$ , tehát  $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I})\mathbf{x}_t$  is szükségképpen stacionárius.

**Granger Reprezentációs Tétel:** 1. lehetőség:  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I}$  a 0 mátrix, vagyis  $n$  darab 0 sajátértéke van. Ilyenkor a VAR a differenciákban stacionárius.

2. lehetőség:  $\dim(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I}) = r, 0 < r < n$ , és  $r$  darab nem-0 sajátértéke van az  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I}$  mátrixnak.

(Ha  $\dim(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I}) = n$ , akkor ez ellentmondás az I(1) feltevéssel, mivel ha a változók I(1)-ek, akkor a VAR polinomnak van legalább 1 db 1-es gyöke, és a  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I}$  mátrixnak legalább egy 0 sajátértéke. Ugyanis az  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p - \mathbf{I}$  mátrix sajátértékeit megkapjuk, ha  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_p$  sajátértékeiből kivonunk 1-et.)

A 2. esetben létezik  $\Gamma_{n \times r}$  és  $\Psi_{r \times n}$

$$\Gamma \Psi = A_1 + A_2 + \dots + A_p - I$$

és

$$\Psi x$$

stacionárius, ahol  $\Psi$  sorai az  $A_1 + A_2 + \dots + A_p - I$  **nem-nulla** sajátértékeihez tartozó sajátvektorok.

### 3.6.1 Johansen-módszer

1. Becsüljük OLS-sel a

$$\nabla \mathbf{x}_t = \Pi \mathbf{x}_{t-1} + \Phi_1 \nabla \mathbf{x}_{t-1} + \dots + \Phi_{p-1} \nabla \mathbf{x}_{t-p+1} + \mathbf{u}_t$$

modellt. (Ez az átmeneti specifikáció. De használhatjuk a hosszú-távú specifikációt is.)

2. A becült  $\Pi$  mátrixban teszteljük a nem-nulla sajátértékek számát, azaz  $r$ -t a fenti jelölésekkel (nyom-teszt vagy legnagyobb sajátérték teszt).

3. Ha  $r = 0$ , akkor a modell a differenciákban stacionárius VAR-ként becüljük.

4. Ha  $0 < r < n$  számú nem-nulla sajátértéket találunk, akkor végezzük el a  $\Gamma \Psi = \Pi$  dekompozíciót. Ehhez meg kell határozni a  $\Pi$  nem-nulla sajátértékeihez tartozó sajátvektorokat, amelyek transzponáltja megadja a becült  $\hat{\Psi}$  mátrixot. Ehhez használjuk a becült  $r$  legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. (A sajátvektorok nem egyértelműek, tehát lehet őket normalizálni.). Majd OLS-sel becüljük a

$$\nabla \mathbf{x}_t = \Gamma \mathbf{z}_{t-1} + \Phi_1 \nabla \mathbf{x}_{t-1} + \dots + \Phi_{p-1} \nabla \mathbf{x}_{t-p+1} + \epsilon_t$$

regressziót, ahol  $\mathbf{z}_{t-1} = \hat{\Psi} \mathbf{x}_{t-1}$ .



Johansen-bebizonyította, hogy ez az eljárás ML becslést ad a paraméterekre.

Az így kapott modellből "visszatérhetünk" egy VAR modellre az  $I(1)$  változóknak. Például  $\Phi_1 = -(\mathbf{A}_2 + \dots \mathbf{A}_p)$ ,  $\Phi_2 = -(\mathbf{A}_3 + \dots \mathbf{A}_p)$ , ...,  $-\mathbf{A}_p = \Phi_{p-1}$  a "transitory" specifikációban.

A SVAR és a kointegráció együtt is alkalmazható, tehetők strukturális feltevések az egyidejű kapcsolatok mátrixáról és a hosszú távú hatásokról is. Például, ha

$$u_t = B\epsilon_t$$

feltevéssel élünk, ahol  $\epsilon_t$  fehér zaj (strukturális sokkok) és  $B$  alsó háromszögmátrix, akkor az impulzus válasz függvények és a variancia dekompozíció ugyanúgy kiszámolható, mint az egyszerű VAR esetben. Tehetünk feltevéseket a hosszú távú hatásokról is.

**Példa: 2x2-es mátrix és kointegráció** Kétváltozós elsőrendű VAR, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.12 \\ 1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

A sajátértékek: 1, 0.2.

$$A - I = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.12 \\ 1 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.12 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

Kétváltozós, egy késleltetési esetben csak akkor lesz a modell nem-kointegrált és  $I(1)$ , ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$A - I = 0.$$

**Példa:**

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

és

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$A_1 - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek a mátrixnak két 0 sajátértéke van, habár nem a 0-mátrix. Tehát nem alkalmazható rá a Granger Reprezentációs Tétel. Ennek az az oka, hogy a feltevések szerint

$$\begin{aligned} x_{1t} &= x_{1,t-1} + u_{1t} \\ x_{2t} - x_{2,t-1} &= 2x_{1,t} + u_{2t}. \end{aligned}$$

Tehát  $x_{1t}$  I(1) változó, viszont  $x_{2t}$  I(2) változó, ami ellentmond a Granger Tétel feltevéseinek.

### 3.6.2 A differenciálás veszélyei

Tegyük fel, hogy

$$\begin{aligned} x_t &= w_t + \epsilon_t \\ y_t &= w_t + \eta_t \\ w_t &= w_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

és az  $u_t$  korrelálatlan a másik két innovációval.

Ekkor  $x$  és  $y$  kointegráltak, és a kointegrációs vektor:  $[1, -1]$ .

Becsüljük a

$$\nabla y_t = \beta \nabla x_t + v_t$$

regressziót OLS-sel!

$$b^{ols} = \frac{\sum (u_t + \nabla \epsilon_t)(u_t + \nabla \eta_t)}{\sum (u_t + \nabla \epsilon_t)}$$

$$p \lim b^{ols} = \frac{\sigma_u^2 + \sigma_{\epsilon\eta}}{\sigma_u^2 + \sigma_\epsilon^2},$$

ami nyilván nem feltétlenül  $\beta$  elméleti értéke, ami 1.

**A Johansen-kointegrációs elemzés algoritmus** 1. Eljutunk egy I(1) változókat tartalmazó modellig.

2. Becsülünk rá egy elfogadható VAR-t.

3. Teszteljük a kointegrációs kapcsolatok számát.

4. A Johansen-módszerrel megbecsüljük a kointegrált modellt.

3. A becült kointegrációs modellel impulzus válasz függvényt, variancia dekompozíciót, előrejelzést készítünk.

### 3.7 Gyakorlatok R-ben

```
1. VAR elemzés
# A szükséges package-ek:
require (vars)
require (urca)
require (tseries)
# Adatok:
data (Canada)
summary (Canada)
Canada [, "e"]
plot(Canada, nc = 2, xlab = "")
plot(diff(Canada), nc = 2, xlab = summary (Canada))
plot(diff(log(Canada)), nc = 2, xlab = summary (Canada))
# Teszteljük az integrációs fokot
(adf.test(Canada[, "prod" ]))
(adf.test(diff(Canada[, "prod"])))
# Készítsük el az összes változóra
# Optimális lag hosszúság meghatározása a szintekre és differenciákra is
VARselect(Canada, lag.max = 8, type = "both")
VARselect(diff(Canada), lag.max = 8, type = "both")
# A változók átrendezése, mivel több eredmény függ a sorrendtől
Canada <- Canada[, c("prod", "e", "U", "rw")]
# Becslés:
p1ct <- VAR(Canada, p = 2, type = "none")
summary (p1ct)
p1dct <- VAR(diff(Canada), p = 1, type = "none")
summary (p1dct)
# Diagnosztikák
#reziduális autokorreláció
ser11 <- serial.test(p1ct, lags.pt = 16, type = "PT.asymptotic")
ser11
#normalitás
norm1 <- normality.test(p1ct)
norm1
# ARCH
arch1 <- arch.test(p1ct, lags.multi = 5)
arch1
plot(arch1)
#paraméter stabilitás
st1=stability(p1ct)
st1
plot(st1)
st2=stability(p1ct,type="Rec-CUSUM")
st2
plot(st2,name="prod")
```

```

#Elemzés
roots(p1ct)
roots(p1dct)
# Impulzus válaszok
irf (p1ct)
irf(p1ct,cumulative=T)
# Mi a különbség?
irf (p1dct)
irf(p1dct,cumulative=T)
# Variancia-dekompozíció
fevd (p1ct)
fevd(p1ct)
# Mennyire van összhangban a két modell?)
# Előrejelzés
(p1=predict(p1ct,n.ahead=50))
fanchart(p1,names="prod")
#Granger-okság
causality (p1ct)
causality(p1ct,cause="e")

```

## 2. SVAR elemzés

```

p2 <- VAR(diff(Canada), p = 2, type = "none")
summary (p2)
# Amat vagy Bmat megadandó
amat=diag(4)
SVAR(p2,Amat=amat)
# azt a mátrixot (Amat vagy Bmat) soha nem kell megadni, amiben nincs
NA, mert akkor nem működik a procedura
bmat [1,1]=NA
bmat [2,2]=NA
bmat [2,3]=NA
bmat [2,4]=NA
bmat [3,3]=NA
bmat [3,4]=NA
bmat [4,4]=NA
bmat
amat
p2svar=SVAR(p2,Amat=amat,Bmat=bmat)
# Nem identifikált modellre (túl kevés restrikción) nincs becslés
bmat [2,3]=0
bmat [2,4]=0
bmat
p2svar=SVAR(p2,Amat=amat,Bmat=bmat)
# Hol a hiba?
p2svarB=SVAR(p2,Bmat=bmat)
# Újabb kísérlet

```

```

bmat [3,2]=NA
bmat [3,4]=0
bmat
p2svarB=SVAR(p2,Bmat=bmat)
summary(p2svarB)
p2svarB$B
#Elemzés
irf (p2svarB)
fevd (p2svarB)
#Hosszú távú restrikciók
bq=BQ(p2)
summary(bq)
bq$A
bq$B
irf(bq)
fevd(bq)

```

### 3. VECM Johansen-procedúra

# Abból indulunk ki, hogy előzőleg úgy döntöttünk, hogy a 'Canada' file-ban levő idősorok mindegyike I(1). Továbbá optimális késleltetésnek a 3 késleltetést találtuk.

# Végezzük el a 3 késleltetésű (K=3) Johansen-féle kointegrációs elemzést, ahol konstans szerepel a jobboldalon, de trend nem, három változatban.

```
summary(ca.jo(Canada, type = "trace", ecdet = "const", K = 3, spec = "transitory"))
```

# Itt a két lehetséges specifikáció közül a „transitory”-t választjuk, és a kointegrációs vektorok számát „trace” teszttel ellenőrizzük.

# Az outputból csak a tesztelési rész fontos:

Values of test statistic and critical values of test:

```
test 10pct 5pct 1pct
```

```
r <= 3 | 4.58 7.52 9.24 12.97
```

```
r <= 2 | 15.32 17.85 19.96 24.60
```

```
r <= 1 | 34.09 32.00 34.91 41.07
```

```
r = 0 | 100.94 49.65 53.12 60.16
```

# Tehát  $r=1$  vagy  $r=2$  választás is lehetséges.

# Kérdés: Miért nincs  $r \leq 4$  sor a táblázatban?

```
summary(ca.jo(Canada, type = "eigen", ecdet = "const", K = 3, spec = "transitory"))
```

# Ez csak abban különbözik az előzőtől, hogy a teszt „eigen”, és nem „trace”.

Values of test statistic and critical values of test:

```
test 10pct 5pct 1pct
```

```
r <= 3 | 4.58 7.52 9.24 12.97
```

```
r <= 2 | 10.74 13.75 15.67 20.20
```

```
r <= 1 | 18.76 19.77 22.00 26.81
```

```
r = 0 | 66.85 25.56 28.14 33.24
```

```

#Eszerint a teszt szerint egyértelműen r=1-et kell választanunk.
summary(ca.jo(Canada, type = "eigen", ecdet = "const", K = 3, spec =
"longrun"))
# Itt a „longrun” specifikációt használjuk.
Values of test statistic and critical values of test:
test 10pct 5pct 1pct
r <= 3 | 4.58 7.52 9.24 12.97
r <= 2 | 10.74 13.75 15.67 20.20
r <= 1 | 18.76 19.77 22.00 26.81
r = 0 | 66.85 25.56 28.14 33.24
# A teszt táblázat ugyanaz, mint az előbb, vagyis a specifikáció nem változ-
tat ezen.
#Renormalizálás és ca.jo objektumok létrehozása
#Rendezzük át rw", "prod", "e", "U sorrendbe a változókat!
vecmt = ca.jo(Canada[, c("rw", "prod", "e", "U")], type = "eigen", ecdet
= "const", K = 3, spec = "transitory")
vecml = ca.jo(Canada[, c("rw", "prod", "e", "U")], type = "eigen", ecdet
= "const", K = 3, spec = "longrun")
# Becslés
# Válasszuk r=1-et!
(vecmt.r1 = cajorls(vecmt, r = 1))
(vecml.r1 = cajorls(vecml, r = 1))
#A modell transzformálása az eredeti VAR formába és vec2var objektumok
létrehozása
(VARvect=vec2var(vecmt, r=1))
(VARvecl=vec2var(vecml,r=1))
# A két vec2var objektumhoz tartozó mátrixok megegyeznek.

# Elemzés
#Innentől bármelyik ver2var objektumot használhatjuk, ugyanazt az ered-
ményt kapjuk.
# Előrejelzés
predict(VARvect, n.ahead=10)
# Impulzus válasz függvény
irf(VARvect,n.ahead=10)
irf(VARvect, cumulative=T, n.ahead=10)
# Variancia dekompozíció
fevd(VARvect,n.ahead=10)

```

## 4 Idősorok frekvenciatartománybeli elemzése

### 4.1 Egy általános matematikai probléma: függvények előállítás szinuszoidok összegeként (Fourier-analízis)

A

$$\cos(t + \phi) = \cos \phi \cos t - \sin \phi \sin t$$

összefüggés alapján

$$\begin{aligned} A \cos(t + \varphi) &= A_1 \cos(t) + A_2 \sin(t) \\ A_1 &= A \cos \varphi, A_2 = -A \sin \varphi \\ A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{A_2}{A_1}\right), \end{aligned}$$

Tehát minden szinuszoid függvény felírható szinusz és koszinusz összegeként, amit adott frekvencia mellett két paraméter jellemez. A komplex exponenciális függvény képezhető, mint

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x).$$

Mint exponenciális függvény nagyon jók a tulajdonságai, könnyen és elegánsan kezelhető. Ezért a Fourier-analízist általában a komplex függvénytan részeként kezelik, azzal, hogy minden állítás lefordítható tisztán valós analízisbeli fogalmakra is.

### 4.2 Fourier-sorok

Ha adott egy  $f(t)$ , a  $[-0.5, 0.5]$  intervallumon négyzetesen integrálható függvény, akkor létezik az alábbi Fourier-sor reprezentációja:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ik2\pi t), \\ c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-0.5}^{0.5} f(t) \exp(-ik2\pi t) dt \end{aligned}$$

Az utóbbi állítás abból adódik, hogy az  $\exp(ik2\pi t), k = 0, \pm 1, \dots$  függvényrendszer ortogonális.

A Fourier-sor felfogható, mint egy jelfüggvény (az  $f(t)$ ) végtelen diszkrét frekvenciájú hatásokra bontása. Tehát: az  $f(t)$  (valós) függvényhez hozzárendeljük a  $c_k$  (komplex) sorozatot, és a  $c_k$  sorozatból rekonstruálhatjuk az  $f(t)$  függvényt. A tétel kiterjeszhető  $[-\infty, \infty]$  halmazon értelmezett periodikus függvényekre is, de általános végtelen halmazon definiált függvényekre a kiterjesztés már nem végtelen sor, hanem integrál alakú reprezentációt követel meg.

Általánosan: négyzetesen integrálható függvényeknek létezik a Fourier transzformáltja:

$$\mathbb{F}(f) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-2\pi i t \omega) dt$$

és az inverz transzformáció is:

$$\mathbb{F}^{-1}(\hat{f}) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(2\pi i t \omega) d\omega.$$

Két speciális eset a diszkrét végtelen és a diszkrét véges Fourier-transzformált. Az előző esetben egy abszolút szummázható sorozatot Fourier-transzformálunk

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(-2\pi i k \omega),$$

ahol az inverz transzformáció:

$$a_k = \int_{-0.5}^{0.5} \hat{f}(\omega) \exp(2\pi i k \omega) d\omega, k = 0, \pm 1 \dots$$

Az utóbbiban pedig egy véges ( $T$ ) elemű  $x_t$  vektort

$$\hat{f}\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left( \sum_{t=1}^T x_t \exp(-i 2\pi t \frac{k}{T}) \right)$$

ahol az inverz transzformáció

$$x_t = \frac{1}{\sqrt{T}} \left( \sum_{k=0}^{T-1} \hat{f}\left(\frac{k}{T}\right) \exp(i 2\pi t \frac{k}{T}) \right).$$

Az előbbi egy végtelen diszkrét időpontokban megfigyelt "jelet" folytonosan mért frekvenciájú hullámok összegeként fejez ki, a második esetben egy véges "jelet" véges frekvenciájú hullámok összegeként fejez ki.

Az ortogonalitás bizonyítása:

Azt látjuk be, hogy az  $\left[ \sum_{t=1}^T \exp(-i j 2\pi \frac{t}{T}) \exp(i l 2\pi \frac{t}{T}) \right]$   $j, l = 0, \dots, T-1 = 0$ , ha  $j \neq l$ , és  $= T$ , ha  $j=l$ .

Az utóbbi triviális, mivel ekkor  $\left[ \sum_{t=1}^T \exp(-i j 2\pi \frac{t}{T}) \exp(i l 2\pi \frac{t}{T}) \right] = \left[ \sum_{t=1}^T \cos(0) \right]$

Az előbbi állítás bizonyításához használjuk fel a  $\sum_{t=1}^T z^t = \frac{z - z^{T+1}}{(1-z)} = \frac{z(1-z^T)}{(1-z)}$

azonosságot. Legyen



$$\begin{aligned} z &= \exp(i(l-j)2\pi\frac{1}{T}), \\ z^T &= \exp(i(l-j)2\pi) = 1. \end{aligned}$$

Következésképpen a  $\frac{1}{\sqrt{T}}$  
$$\begin{bmatrix} \exp(-i2\pi\frac{1}{T} * 0) & \exp(-i2\pi\frac{2}{T} * 0) & \exp(-i2\pi\frac{T}{T} * 0) \\ \exp(-i2\pi\frac{1}{T} * 1) & \exp(-i2\pi\frac{2}{T} * 1) & \exp(-i2\pi\frac{T}{T} * 1) \\ \exp(-i2\pi\frac{1}{T} * (T-1)) & \exp(-i2\pi\frac{2}{T} * (T-1)) & \exp(-i2\pi\frac{T}{T} * (T-1)) \end{bmatrix}$$
 mátrix Hermitikus, tehát az inverze megegyezik a konjugált transzponáltjával.

$$\begin{aligned} Hx &= c \\ x &= H^*c, \end{aligned}$$

ahol  $*$  jelzi a konjugált transzponált operációt.

### 4.3 Hogyan használható mindez az idősorelméletben?

**Spektrum (spectral density)** Ha adott egy abszolút szummázható autokovariancia függvény (az abszolút szummázhatóság elégséges, de nem szükséges feltétel), akkor ennek létezik Fourier-transzformáltja, amit a spektrumnak nevezünk (spectral density), és amely inverz Fourier-transzfomáltja az autokovariancia függvény.

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \exp(-2\pi i k \omega), -0.5 \leq \omega \leq 0.5 \\ \gamma_k &= \int_{-0.5}^{0.5} f(\omega) \exp(2\pi i k \omega) d\omega, k = 0, \pm 1 \dots \end{aligned}$$

Itt már felesleges a "kalapos" jelölés,  $\{\gamma_k\} \iff f(\omega)$ , hozzárendelésről van szó.

A spektrum páros függvény, továbbá integrálja a variancia:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= f(-\omega) \\ \gamma_0 &= \int_{-0.5}^{0.5} f(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Vagyis az autokovariancia függvény és a spektrum ugyanazt az információt tartalmazzák, elméletileg mindkettő levezethető a másiktól. A spektrum olyan, mint egy prizma, ami egy színt (az idősor) alapszínekre bontja. Az utóbbi állítás szerint a varianciát frekvenciák szerinti komponensekre tudjuk osztani.

**Cramér (Spektrális) Reprezentációs Tétel** Minden kovariancia-stacionárius folyamat reprezentálható, mint

$$y_t = \mu + \int_0^\pi [A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$$

ahol  $A(\omega)$  és  $B(\omega)$  független és autokorrelálatlan folytonos idejű fehér zaj folyamatok (a variancia változhat).

Tehát minden stacionárius folyamat felfogható, mint nem-megszámlálható véletlen és korrelálatlan amplitudójú periodikus függvények "összege". (A frekvenciatartománybeli megfelelője a Wold Reprezentációs Tételnek.)

Példa spektrumra: Fehér zaj  $\sigma^2$  varianciával.

$$f(\omega) = \sigma^2.$$

Hogyan lehet általános ARMA vagy MA(végtelen) folyamatok spektrumát meghatározni elméletleg?

**Állítás:** Ha  $a_i$  egy kétszer-végtelen sorozat, amely egy kétoldali lineáris filter definiál, és

$$y_t = \sum a_i x_{t-i},$$

akkor

$$f_y = |\mathbb{F}_a|^2 f_x,$$

ha  $\mathbb{F}_a$  az  $a_i$  sorozat Fourier-transzformáltja.

Ebből a kifejezésből levezethető bármely ARMA folyamat, vagy általában végtelen MA folyamat spektruma.

## 4.4 Statisztikai idősoorelemzés és frekvenciatartomány

Hogyan becsüljük a spektrumot?

### 4.4.1 Nem-paraméteres becslések

Legyen  $x_1, \dots, x_T$  adott,  $\omega_j = \frac{j}{T}$ , és

$$d(\omega_j) = \frac{1}{\sqrt{T}} \left( \sum_{t=1}^T x_t \exp(-i2\pi t \omega_j) \right).$$

A minta periodogramot ebből a következőképpen definiáljuk. Minden  $j$ -re:

$$I(\omega_j) = |d(\omega_j)|^2.$$

Belátható, hogy

$$I(\omega_j) = \sum_{h=-(T-1)}^{T-1} acf(h) \exp(-i2\pi\omega_j h),$$

ahol  $acf(h)$  a minta empirikus autokovariancia függvénye. Tehát a periodogram valóban a spektrum statisztikai "megfelelője".

Ha  $x_t$  stacionárius, akkor a periodogram ordinátái is stacionáriusak, és bizonyos függvényeinek az eloszlása is meghatározható (konfidencia intervallumok számolhatók). Ugyanakkor a periodogram nem konzisztens becslése a spektrumnak. A konzisztencia elérhető átlagolással, illetve általában simítással.

#### 4.4.2 Paraméteres becslések

Például ha feltesszük, hogy az idősor egy ARMA folyamatot követ, akkor az ARMA paraméterek becsült értékeit behelyettesítve a megfelelő elméleti spektrum összefüggésbe is kapunk egy becslést.

#### Hogyan interpretálhatjuk és mire használhatjuk a frekvencia tartományi elemzést?

1. Bizonyos műveletek könnyebben elvégezhetők a Fourier-transzformáltakkal, ezért bizonyos elméleti eredmények levezetésére nagyon alkalmasak. (Például filterek hatásának vizsgálatára.)

2. Zajsűrés: amikor zajjal terhelt periodikus folyamattal van dolgunk. Ki-hagyjuk az alacsony "teljesítményű" frekvenciákat és ezek nélkül rekonstruáljuk az idősort. Ha csak kevés frekvencián van jelentős súly, akkor így egy "takarékos" reprezentációját kapjuk az eredeti idősortnak.

3. Létezik többdimenziós általánosítás, a koherencia, mint a korreláció frekvencia tartománybeli megfelelője.

A kereszt-spektrum definiálható, mint

$$f_{xy}(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} cov_{xy}(h) \exp(-2\pi i \omega h).$$

Ekkor:

$$f_{xy}(\omega) = \overline{f_{yx}(\omega)}.$$

A koherencia, mint az összefüggés mérőszáma:

$$C_{xy} = \frac{|f_{xy}(\omega)|^2}{f_x f_y},$$

$$0 \leq C_{xy} \leq 1,$$

ami a négyzetes korrelációnak megfelelő fogalom.

#### 4.4.3 Wavelet elemzés

A spektrális reprezentáció nem tudja időben lokalizálni a véletlent. Mintegy az "idők kezdetén" dől el az egyes frekvenciákhoz tartozó amplitudók realizációja. Ennek megfelelően semmilyen nem-stacionárius viselkedést sem tud érzékelni. A Fourier-transzformációnak ezt a problémáját eleinte azzal igyekeztek orvosolni, hogy bevezették a rövid-távú Fourier transzformáltat:

$$\hat{f}(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)w(t - \tau) \exp(-2\pi i \omega t) dt$$

ahol  $w(t - \tau)$  egy ablak függvény. Ez már képes időponthoz kötni az idősor "mozgását", de az ablak meghatározása nem enged meg rugalmas lokalizálást. A wavelet transzformáció felfogható a Fourier transzformáció egy lokalizálásra képes módosításának, ahol ez a lokalizálás rugalmasan valósítható meg. Egyre gyakrabban használják közgazdasági idősorok vizsgálatára is.

**A folytonos wavelet transzformáció** Ha a rövidtávú Fourier-transzformációból indulunk ki, akkor helyettesítsük  $w(t - \tau) \exp(-2\pi i \omega t)$ -t valamilyen időtől függő filterrel. Az eredmény:

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t - \tau}{s}\right) dt,$$

ahol  $\psi(t)$  a (gyakran komplex) wavelet,  $\psi^*$  a konjugáltja, és amelyre  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt =$

0 és  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$ . A wavelet transzformáltnak már két változója van: az

$s$ , amit itt inkább skálának, mint frekvenciának szokás nevezni, és az idő ( $\tau$ ). A spektrum analógiájára definiálható a wavelet spektrum, mint a wavelet transzformált négyzete, ami szintén a varianciát bontja fel összetevőkre, és ahol a felbontás két dimenzióban (skála és időpont szerint) történik. A koherencia mintájára két változó wavelet-je között definiálható a wavelet koherencia, ami időben és skálánként változó "korreláció-szerű" fogalom.

## 4.5 Gyakorlatok R-ben

```
# A forint/dollár árfolyam spektrális elemzése
neerm <- read.csv2(file="neer_eredeti.csv", header=T, sep=";", row.names=1)
neermts=ts(neerm, frequency=12, start=c(1991,1))
lnermts = log(neermts)
lhufd= lnermts[, "Hungary"]
dlhufd=diff(lhufd)

# A spektrum nyers becslése a periodogramból
dlhufd.per = spec.pgram(dlhufd, fast=F, log="no", detrend=F)
which.max(dlhufd.per$spec)
#Megkeressük a legerősebb frekvenciát
dlhufd.per$spec[19]
dlhufd.per$freq[19]
# Majd konfidencia intervallumot készítünk a becsült spektrum értékre
U = qchisq(.025,2)
L = qchisq(.975,2)
2*dlhufd.per$spec[19]/L
2*dlhufd.per$spec[19]/U

#Egy simított periodogram becslés
(k = kernel("modified.daniell", c(3,1)))
dlhufd.ave = spec.pgram(dlhufd, k, fast=F, log="no", detrend=F)
# Keresünk ismét legerősebb frekvenciát
which.max(dlhufd.ave$spec)
which.max(dlhufd.ave$spec[2:161])
# Majd újra konfidencia intervallumot szerkesztünk
df = dlhufd.ave$df
U = qchisq(.025, df)
L = qchisq(.975, df)
dlhufd.ave$spec[17]
df*dlhufd.ave$spec[17]/L
df*dlhufd.ave$spec[17]/U

# AR modellből becsülünk paraméteresen spektrumot
dlhufd.arsp = spec.ar(dlhufd, log="no")

# A három spektrum összehasonlítása
par(mfrow=c(3,1))
dlhufd.per = spec.pgram(dlhufd, fast=F, log="no", detrend=F)
dlhufd.ave = mvspec(dlhufd, k, fast=F, log="no", detrend=F)
dlhufd.arsp = spec.ar(dlhufd, log="no")
```

Függelék: Általános matematikai alapok

## 4.6 Mátrixaritmetika

Az  $A$  és  $B$  mátrixok hasonlóak, ha létezik  $P$ , amelyre

$$B = P^{-1}AP.$$

A hasonlóság ekvivalencia relációt definiál: ugyanaz a lineáris transzformáció, különböző bázisban felírva.

Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja és ezért a sajátértékei és azok algebrai multiplicitása (azaz hány-szoros gyök a sajátérték), továbbá a nyoma.

Ugyanaz a sajátértékek geometriai multiplicitása (az egyes sajátértékekhez tartozó saját alterek dimenziója).

**Állítás: Ha  $A$  sajátértékei különbözőek, akkor  $Q$  a jobboldali sajátvektorok mátrixa invertálható, és**

$$Q^{-1}AQ = \langle \Lambda \rangle.$$

(Itt és a későbbiekben  $\langle \Lambda \rangle$  a sajátértékeket a megfelelő algebrai multiplicitásokkal tartalmazó diagonális mátrix.)

Bizonyítás:

$$AQ = Q \langle \Lambda \rangle$$

alapján nyilvánvaló.

Mivel a sajátértékek között lehetnek komplex konjugált párok, előfordulhat, hogy  $\langle \Lambda \rangle$  és  $Q$  nem-valós, annak ellenére, hogy  $A$  valós elemű mátrix.

Mi történik, ha van többszörös sajátérték? Ilyenkor előfordulhat, hogy  $Q$  invertálható, és

$$Q^{-1}AQ = \langle \Lambda \rangle,$$

vagyis nincs változás, az  $A$  mátrix diagonalizálható.

Ha  $Q$  nem invertálható, akkor is létezik egy  $J$  blokkdiagonális mátrix, ami az  $A$  Jordan-normál formája, és ami hasonló  $A$ -hoz. Itt a transzformáció mátrixában ( $M$ ) az úgynevezett általánosított sajátvektorok vannak, nem a sajátvektorok.

$$M^{-1}AM = J.$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

Az  $i$ -edik sajátértékhez tartozó Jordan-blokk vagy egyelemű  $(\lambda_i)$ , vagy az alábbi alakú:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Létezik reál Jordan normálforma is. Egy komplex gyökpárhoz tartozó reál Jordan-blokk.

$$J_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}.$$

## 4.7 Lineáris differencia egyenletek

Tekintsük az alábbi  $p$ -ed rendű egyváltozós differencia egyenletet:

$$\pi_n = \alpha_1 \pi_{n-1} + \dots + \alpha_p \pi_{n-p}.$$

Legyen  $\lambda_i$  a következő polinom valós gyöke.

$$\lambda^p - \alpha_1 \lambda^{p-1} - \dots - \alpha_p = 0.$$

Ekkor tetszőleges  $A_i$ -re

$$\pi_n = A_i \lambda_i^n$$

megoldása a differenciagyenletnek.

Ugyanis a hipotetikus megoldás alapján

$$A_i \lambda_i^n = \alpha_1 A_i \lambda_i^{n-1} + \dots + \alpha_p A_i \lambda_i^{n-p}.$$

Ha mindkét oldalt osztjuk  $A_i \lambda_i^{n-p}$ -vel, akkor

$$\lambda_i^p = \alpha_1 \lambda_i^{p-1} + \dots + \alpha_p,$$

ami feltevés szerint igaz.

Minden megoldás előállítható

$$\pi_n = \sum_i^p A_i \lambda_i^n$$

alakban. A  $p$  darab kezdeti feltétel meghatározza az  $A_i$  konstansokat.

Láthatóan  $\pi_n$  akkor és csakis akkor konvergál, ha minden sajátérték abszolút értékben kisebb, mint 1.

Amennyiben többszörös gyökök is előfordulnak, illetve vannak komplex gyökpárok, a stabilitás feltétele mindig az, hogy a sajátértékek abszolút értéke 1-nél kisebb legyen.

Létezik valós Jordan normálforma is.



## 4.8 Lineáris differencia egyenletek

Tekintsük az alábbi  $p$ -ed rendű egyváltozós differencia egyenletet:

$$\pi_n = \alpha_1 \pi_{n-1} + \dots + \alpha_p \pi_{n-p}.$$

Legyen  $\lambda_i$  a következő polinom valós gyöke.

$$\lambda^p - \alpha_1 \lambda^{p-1} - \dots - \alpha_p = 0.$$

Ekkor tetszőleges  $A_i$ -re

$$\pi_n = A_i \lambda_i^n$$

megoldása a differenciaegyenletnek.

Ugyanis a hipotetikus megoldás alapján

$$A_i \lambda_i^n = \alpha_1 A_i \lambda_i^{n-1} + \dots + \alpha_p A_i \lambda_i^{n-p}.$$

Ha mindkét oldalt osztjuk  $A_i \lambda_i^{n-p}$ -vel, akkor

$$\lambda_i^p = \alpha_1 \lambda_i^{p-1} + \dots + \alpha_p,$$

ami feltevés szerint igaz.

Minden megoldás előállítható

$$\pi_n = \sum_i^p A_i \lambda_i^n$$

alakban. A  $p$  darab kezdeti feltétel meghatározza az  $A_i$  konstansokat.

Láthatóan  $\pi_n$  akkor és csakis akkor konvergál, ha minden sajátérték abszolút értékben kisebb, mint 1.

Amennyiben többszörös gyökök is előfordulnak, illetve vannak komplex gyökpárok, a stabilitás feltétele mindig az, hogy a sajátértékek abszolút értéke 1-nél kisebb legyen.

### 4.8.1 Többváltozós elsőrendű lineáris differenciaegyenlet

Ennek általános alakja:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A} \mathbf{x}_{t-1}.$$

Belátható, hogy nem szükséges magasabbrendű egyenletekkel foglalkozni. Tekintsünk egy másodrendű differencia egyenletet:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2}.$$

Vezessünk be új változókat:

$$\begin{aligned} y_{1t} &= x_t \\ y_{2t} &= x_{t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{1t} &= \alpha_1 y_{1,t-1} + \alpha_2 y_{2,t-1} \\ y_{2t} &= y_{1,t-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{1t} &= a_1 & a_2 & y_{1,t-1} \\ y_{2t} &= 1 & 0 & y_{2,t-1}\end{aligned} \quad .$$

Ennek a példának általánosításaként elsőrendű, többváltozós alakra hozható minden magasabb rendű egyenlet, és egyenletrendszer.

A többváltozós kezdőérték probléma

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{t+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_0 &\text{ adott.}\end{aligned}$$

Különböző sajátértékek esetén a megoldás:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0.$$

Mivel létezik

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{J}$$

legyen

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}.$$

Ebből:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}_t &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{J}\mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_t &= \mathbf{J}^t \mathbf{y}_0.\end{aligned}$$

Ha a gyökök abszolút értékben kisebbek 1-nél, akkor  $\mathbf{J}^t$  tart a 0-hoz, azaz a rendszer aszimptotikusan stabil.

Az egyes gyökök különböző kvalitatív viselkedéseket implikálnak, de végül a legnagyobb abszolút értékű gyök hatása "győz".

Az általános esetben a Jordan-formából levezethető ugyanez a kvalitatív eredmény.

## 4.9 Késleltetési polinomok és inverzük

A késleltetési operátor

$$Lx_t = x_{t-1}$$

sorozathoz sorozatot rendel.

Léteznek  $L$  hatványai:

$$L^n x_t = L(L^{n-1})x_t = x_{t-n}$$

$$L^0 x_t = 1x_t.$$

Létezik  $L^{-1}$  operátor, amelyre

$$\begin{aligned} L^{-1}(Lx_t) &= x_t \\ L^{-1}x_t &= x_{t+1}. \end{aligned}$$

Értelmezhetők  $L$  véges polinomjai:

$$A(L)x_t = x_t + \sum_{i=1}^k \alpha_i L^i x_t.$$

$$A(L)x_t = x_t + a_1 Lx_t + \dots + a_m L^m x_t.$$

Például:

$$x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} = (1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2)x_t.$$

A késleltetési polinommal az összes szokásos polinom műveletet értelmezni tudjuk (pl. polinomok szorzása vagy összeadása), és ugyanígy "léteznek" gyökei is.

Kérdés: Mi a különbség  $(1 - L^2)$  és  $(1 - L)^2$  között?

$$\begin{aligned} (1 - L^2)x_t &= x_t - x_{t-2} \\ (1 - L)^2 x_t &= x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}. \end{aligned}$$

Tekintsük a

$$y_t = A(L)x_t$$

egyenletet. ( $y_t - t$  előállítjuk, mint  $x_t$  polinomját.) Megoldható-e ez, mint

$$A^{-1}(L)y_t = x_t?$$

Azaz létezik-e  $A^{-1}(L)$  polinom, amire  $A^{-1}(L)A(L) = L^0 = 1$ . Ha igen, akkor  $x_t$ -t is elő tudjuk állítani, mint  $y_t$  polinomját.

Könnyen látható, hogy  $A^{-1}(L)$  végtelen sok nem-0 együtthatóval kell rendelkezzen, vagyis véges polinom inverze biztosan végtelen polinom. Tehát a polinomok halmazát ki kell terjeszteni végtelen fokszámú polinomokkal is. Azonban nem értelmezzük tetszőleges végtelen polinomokat. Itt feltesszük, hogy a végtelen polinom együtthatói négyzetesen összegeezhetők.

$$B(L) = 1 + b_1 L + \dots + b_n L^n + \dots = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} b_i L^i, \sum b_i^2 < \infty.$$

Legyen  $\pi_i$  az  $A^{-1}(L)$  megfelelő együtthatója:

$$(1 + a_1 L + \dots + a_m L^m)(\pi_0 L^0 + \pi_1 L + \dots + \pi_n L^n + \dots) = (1 + 0L + \dots + 0L^n + \dots).$$

Belátható, hogy teljesül

$$\pi_n = -(a_1 \pi_{n-1} + \dots + a_m \pi_{n-m})$$

Mint láttuk a  $\pi_n$  sorozatra a konvergencia feltétel csak akkor teljesül, ha a

$$\lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m$$

polinom gyökei abszolút értékben kisebbek, mint 1.

Viszont ez ekvivalens azzal, hogy az

$$1 + a_1 L^1 + \dots + a_m L^m$$

polinom gyökeinek abszolút értéke 1-nél nagyobb.

Ugyanis

$$\begin{aligned} \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m &= 0 \\ \frac{1}{\lambda^m} (\lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_m) &= 0 \\ 1 + a_1 \lambda^{-1} + \dots + a_m \lambda^{-m} &= 0. \end{aligned}$$

(Itt a  $\lambda \neq 0$  mindig teljesül.)

Példa: a  $1 + aL$  polinóm inverzének kiszámítása.

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1 \\ \pi_1 * 1 + a * 1 &= 0, \pi_1 = -a \\ \pi_2 * 1 - a * a &= 0, \pi_2 = a^2 \\ \pi_i &= (-1)^i a^i. \end{aligned}$$

Példa: a  $1 - aL$  polinom inverzének kiszámítása.

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 1 \\
\pi_1 * 1 - a * 1 &= 0, \pi_1 = a \\
\pi_2 * 1 - a * a &= 0, \pi_2 = a^2 \\
\pi_i &= a^i.
\end{aligned}$$

Példa: az  $1+a_1L+a_2L^2+a_3L^3$  polinom inverze első négy elemének kiszámítása.

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 1 \\
\pi_1 + a_1 &= 0, \pi_1 = -a_1 \\
\pi_2 + \pi_1 * a_1 + a_2 &= 0, \pi_2 = -a_2 + a_1^2 \\
\pi_3 + \pi_2 * a_1 + \pi_1 * a_2 + a_3, \pi_3 &= -a_3 + a_1a_2 - a_1^3 + a_2a_1.
\end{aligned}$$

Az exogén változós  $p$ -ed rendű differencia egyenlet felírható késleltetési polinom alakban:

$$A(L)x_t = (1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i)x_t = f_t, \alpha_p \neq 0.$$

A megoldás pedig, mint

$$x_t = A(L)^{-1}f_t.$$

## 5 Felhasznált irodalom

Box, G. E., Jenkins, G. M., Reinsel, G. C., & Ljung, G. M. (2015). Time series analysis: forecasting and control. John Wiley & Sons.

Darvas Zsolt *Bevezetés az idősorelemzésbe. 2005, Jegyzet. Budapest.*

Hamilton, James Douglas. Time series analysis. Vol. 2. Princeton, NJ: Princeton university press, 1994.

Kirchgässner, Gebhard, Jürgen Wolters, and Uwe Hassler. Introduction to modern time series analysis. Springer Science & Business Media, 2012.

Pfaff, Bernhard. "VAR, SVAR and SVEC models: Implementation within R package vars." Journal of Statistical Software 27.4 (2008): 1-32.

Shumway, Robert H., and David S. Stoffer. "Time series regression and exploratory data analysis." Time series analysis and its applications. Springer New York, 2011. 47-82.